

УДК 519.72+656.25

В. А. Ходаковский, д-р техн. наук,

Кафедра «Математика и моделирование»,
Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I

Т. В. Ходаковский

ЗАО «Дикси-Юг», Санкт-Петербург

МЕРА СХОДСТВА УЗКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ

В статье предлагается метод обработки узкополосных сигналов, позволяющий существенно улучшить возможности их сжатия, что позволяет оптимально обрабатывать и сильно сжимать во времени даже такие сигналы, которые при стандартной корреляционной обработке не обладают хорошими автокорреляционными свойствами.

цифровые сигналы; корреляционные свойства сигнала; мера сходства; свертка сигналов; функция с ограниченным спектром; шум.

Введение

В системах железнодорожной автоматики и телемеханики (СЖАТ) широко используются различные виды кодирования и модуляции сигналов, позволяющие решать задачи телесигнализации и телеуправления напольными и бортовыми устройствами [1]. В настоящее время в этих системах осуществляется интенсивный переход на цифровые технологии и все чаще предлагаются решения, позволяющие частично или полностью заменить аналоговые элементы систем на цифровые. Такой переход позволяет получить, кроме миниатюризации и снижения энергопотребления, новые качественные характеристики систем. Вместе с тем переход на цифровые технологии несколько расширяет возможности систем с цифровой обработкой, к которым можно отнести:

- повышение помехоустойчивости сигналов;
- улучшение корреляционных свойств сигналов;
- улучшение разрешающей способности систем;
- повышение скорости передачи информации без расширения полосы частот.

В статистической радиотехнике [2] хорошо известен вывод о том, что для улучшения корреляционных свойств сигнала при его приеме в шумах необходимо расширять спектр этого сигнала. Наилучшими корреляционными свойствами обладает белый шум, АКФ которого является дельта-функцией. Поэтому большинство разработанных к настоящему времени систем обработки сигналов в шумах используют широкополосные сигналы.

1 Свертка как мера сходства сигналов

Известно, что разрешающая способность технической системы по частоте тем выше, чем более узкополосный сигнал использует эта система и чем более длительное время он принимается [3, 4]. И наоборот, разрешающая способность технической системы по времени тем выше, чем меньше длительность излучаемого импульса, а значит, шире используемая этим импульсом полоса частот.

Поэтому в системах определения координат и скорости объекта используется узкополосный сигнал с высокой стабильностью частоты, позволяющий выделить частоту Доплера и по ней определить необходимые параметры движения объекта.

Измерение дальности сводится к измерению времени распространения сигнала в соответствующей среде, а значит, точность определения дальности будет зависеть от точности измерения времени. Таким образом, для высокоточного измерения дальности необходимо либо уменьшать длительность используемых импульсов, либо использовать сигнал большой длительности, но широкополосный, с хорошими автокорреляционными свойствами. При использовании автокорреляционного приема такой подход позволяет сжать сигнал и получить отклик приемника с длительностью, позволяющей обеспечивать высокоточное измерение интервала времени распространения сигнала, а следовательно, и дальности до объекта.

Хорошие автокорреляционные свойства позволяют осуществить сжатие длительности сигнала в оптимальном приемнике и подавить аддитивный шум, поскольку практически вся энергия сигнала при оптимальной обработке сосредоточена в области центрального пика автокорреляционной функции (АКФ), а энергия шума распределена во всем интервале действия сигнала.

Обычными подходами при оптимальном приеме сигнала на фоне шума являются реализации корреляционного или фильтрационного приема известного сигнала с хорошими корреляционными свойствами. Оба подхода основаны на вычислении взаимной корреляционной функции принимаемой смеси (сигнала с шумом) и сигнала, который известен на приемной стороне.

Если известен сигнал $u(t)$ и на входе приемника присутствует аддитивный шум $n(t)$, т. е. принимается смесь $s(t) = u(t) + n(t)$, то оптимальный приемник формирует выходной сигнал, реализуя обработку в виде свертки $v(t) = s(t)u(t)$, которая является мерой сходства сигналов:

$$v(t) = \int_{t_n}^{t_k} s(\tau)u(t + \tau)d\tau. \quad (1)$$

Критерием принятия решения о приеме сигнала обычно выступает условие превышения значения взаимной корреляционной функции в момент t_0 некоторого порогового значения

$$v(t_0) > A. \quad (2)$$

Пусть задан сигнал вида части синусоиды с прямоугольной огибающей

$$u(t) = \begin{cases} \sin(2\pi ft) & \text{при } -1 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{при } 1 < t < -1. \end{cases} \quad (3)$$

Сигнал вида (3) для несущей, равной $f = 4$ Гц, приведен на рис. 1.

На рис. 2 приведена АКФ сигнала (3).

Из рис. 2 видно, что сигнал вида (3) не обладает хорошими автокорреляционными свойствами, поскольку боковые пики АКФ по амплитуде близки к амплитуде центрального пика.

Для того чтобы обработка входного сигнала и правило принятия решения об его обнаружении давали наилучший результат, применяют сигналы, обладающие лучшими корреляционными свойствами, чем у сигнала (3). Основное требование к таким сигналам состоит в том, чтобы основной пик АКФ этого сигнала существенно превышал боковые пики. Одним из таких сигналов

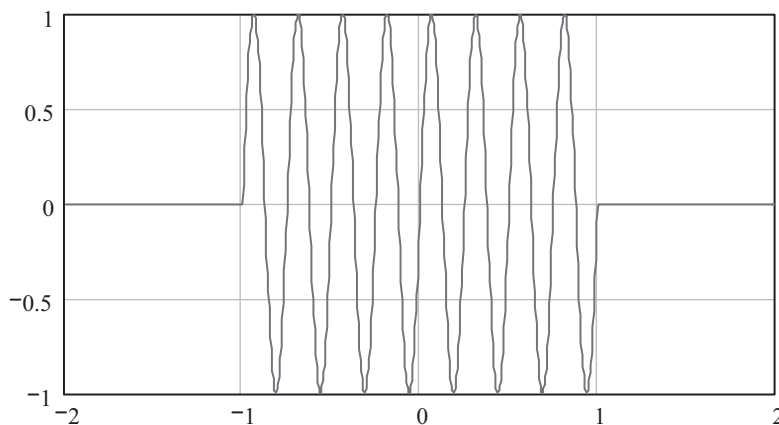


Рис. 1. Сигнал вида (3)

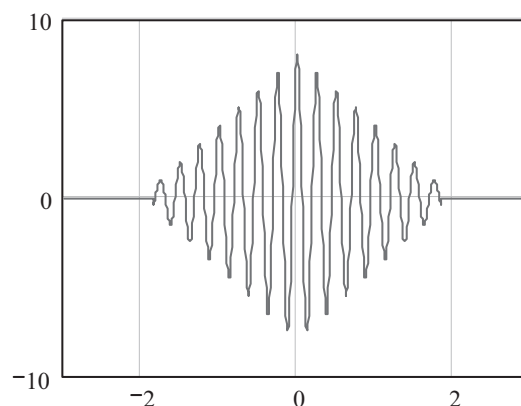


Рис. 2. Автокорреляционная функция сигнала (3), вычисленная по формуле (1)

является сигнал, частота которого изменяется по линейному закону – линейно-частотно модулированный (ЛЧМ) сигнал (рис. 3):

$$u(t) = \begin{cases} \sin(2\pi(4 + 1,4 \cdot (t - 2)(t - 2))) & \text{при } 2 \leq t \leq 4; \\ 0 & \text{при } t < 2 \text{ и } t > 4. \end{cases} \quad (4)$$

ЛЧМ-сигнал вида (4) в момент начала формирования ($t = 2$ с) имеет частоту $f = 4$ Гц, а к концу формирования частота $f = 4 + 1,4 \cdot (4 - 2) = 6,8$ Гц.

Известно большое количество сигналов с хорошими автокорреляционными свойствами: коды Баркера, m -последовательности и др. Однако дело в том, что для передачи сигнала по радиоканалу применяется модуляция некоторой несущей этим сигналом с хорошими автокорреляционными свойствами, в результате мы получаем сигнал с другими автокорреляционными свойствами, которые существенно зависят от вида модуляции. Например, если некоторым кодом Баркера [3] амплитудно промодулировать несущую f_0 , то получим сигнал, спектр которого будет состоять из смеси этой немодулированной несущей и двух боковых полос, каждая из которых по ширине будет соответствовать

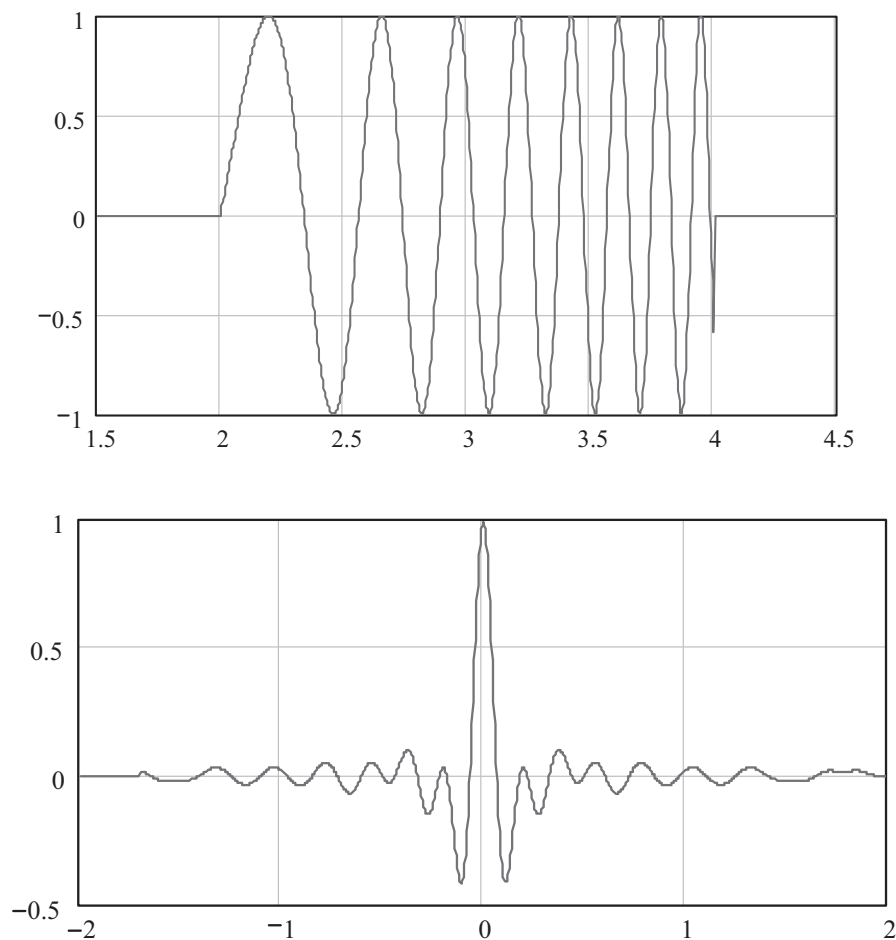


Рис. 3. Сигнал с линейной частотной модуляцией ЛЧМ и его АКФ

спектру выбранного кода Баркера. АКФ полученной смеси будет далека от АКФ кода.

В современных системах связи используется, как правило, фазовая манипуляция ($0-180^\circ$) или ($+90^\circ/-90^\circ$) которая позволяет подавить несущую и тем самым заметно экономить энергию сигнала.

Для улучшения автокорреляционных свойств сигнала используют очень длинные коды и достаточно высокую частоту манипуляции фазы, что приводит к заметному расширению спектра сигнала. Наилучшим сигналом по автокорреляционным свойствам является, как уже было сказано, белый шум, спектр которого бесконечен, а значит, такой сигнал нереализуем, но его автокорреляционная функция равна δ -функции Дирака [5].

Вопрос учета модуляции при анализе автокорреляционных свойств сигнала известен, и существует множество способов синтеза сигнала с оптимальными автокорреляционными свойствами, позволяющих непосредственно передавать сигнал по радиоканалу. Вместе с тем системный подход к решению комплексной задачи (выбора оптимального сигнала и поиска метода его обработки) приводит нас к необходимости вернуться именно к методу обработки, а по сути, к мере сходства сигналов, т. е. к вычислению взаимной корреляционной функции опорного и принимаемого сигнала.

2 Обобщенная свертка сигналов

Анализируя обработку вида (1) можно отметить, что она реагирует и накапливает энергию сигнала только в тех случаях, когда знаки отсчетов принятого и опорного сигналов совпадают, в противном случае (при несовпадении знаков отсчетов опорного и принятого сигналов) получаются отрицательные значения, которые снижают накопленную сумму. В связи с этим авторы предлагают дополнение обработки вида (1) некоторой весовой функцией, которая будет близка к единице только в том случае, когда, кроме совпадения знаков отсчетов, дополнительно требуется совпадение значений производных (или только знаков) в этих точках. Рассмотрим некоторые варианты таких весовых функций. Одна из них представлена в обработке (5):

$$r(t) = \int_{t_n}^{t_k} s(\tau)s(t + \tau)e^{\frac{-(s'(\tau)-s'(t+\tau))^2}{k}} dt. \quad (5)$$

Если сдвиг сигнала равен нулю, то функция (5), как и функция (1), дает значение, равное мощности сигнала на заданном интервале, т. е.

$$r(t=0) = \int_{t_n}^{t_k} s(\tau) \cdot s(\tau) d\tau = \int_{t_n}^{t_k} s(\tau)^2 d\tau = P.$$

Используем сигнал вида (3) и обработку вида (5) при различных коэффициентах k . На рис. 4 приведены полученные автокорреляционные функции.

Из рисунка видно, что применение обработки вида (5) позволяет более эффективно сжать сигнал, а значит, расширить класс сигналов с хорошими автокорреляционными свойствами.

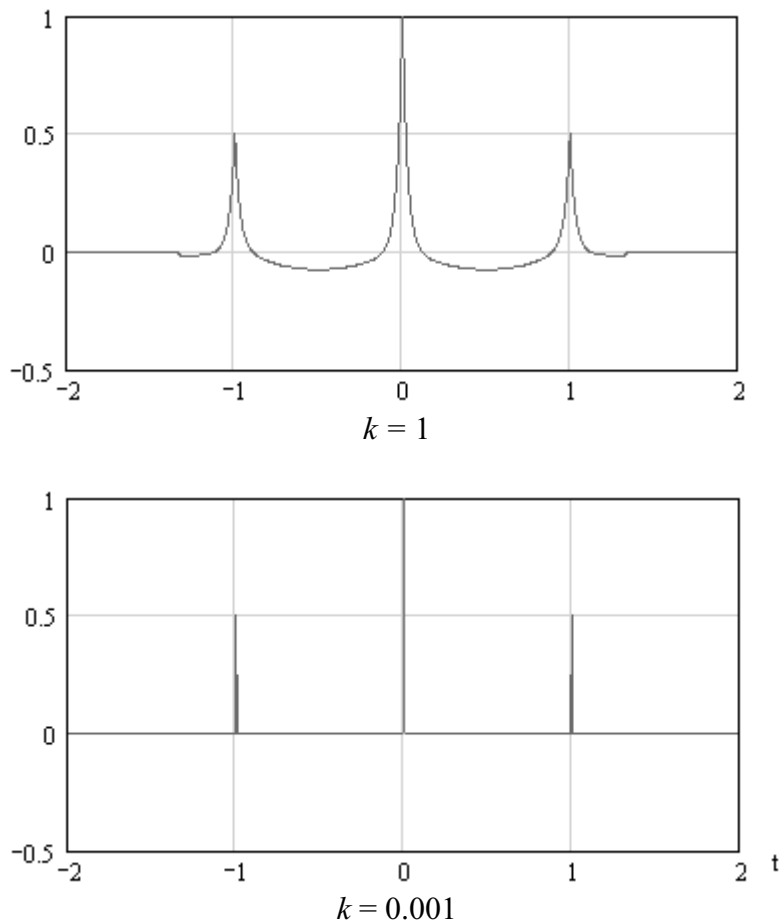


Рис. 4. АКФ сигнала вида (3) с использованием в интеграле свертки весовой функции (5)

Рассмотрим более сложный непрерывный узкополосный сигнал. Закон изменения амплитуды этого сигнала представлен на рис. 5, а его спектр – на рис. 6.

Результат применения к сигналу (рис. 5) обработки вида (5) приведен на рис. 7.

Анализ АКФ на рис. 7 показывает, что степень сжатия сигнала зависит от параметра k , который выбирается исходя из отношения сигнал – шум, действующего в канале связи. Применение предложенного подхода позволяет легко решать радиотехнические задачи повышения точности измерения интервалов времени. Не решенным, однако, остается вопрос о возможности оценки производной принятой смеси сигнала с шумом.

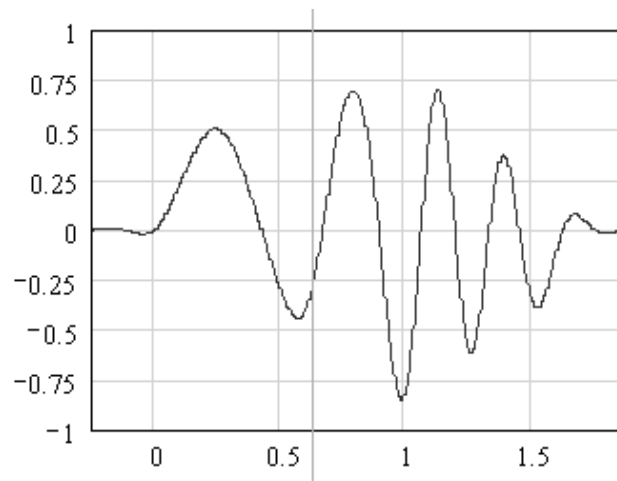


Рис. 5. Узкополосный сигнал с верхней граничной частотой в спектре $F_b = 4$ Гц и энергией, сосредоточенной в интервале времени $[0-1,75$ с]

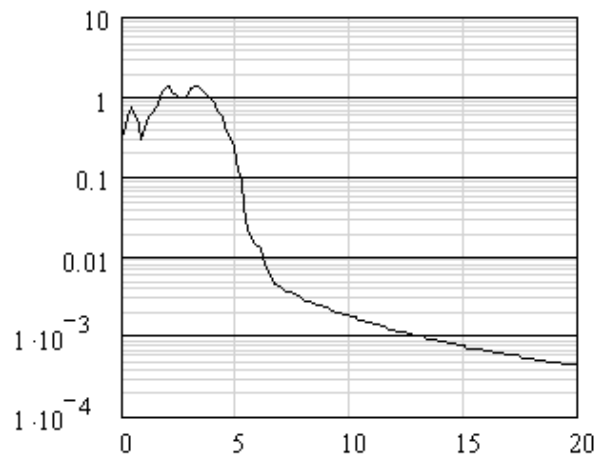


Рис. 6. Спектр узкополосного сигнала с верхней граничной частотой $F_b = 4$ Гц и энергией, сосредоточенной в интервале времени $[0-1,75$ с]

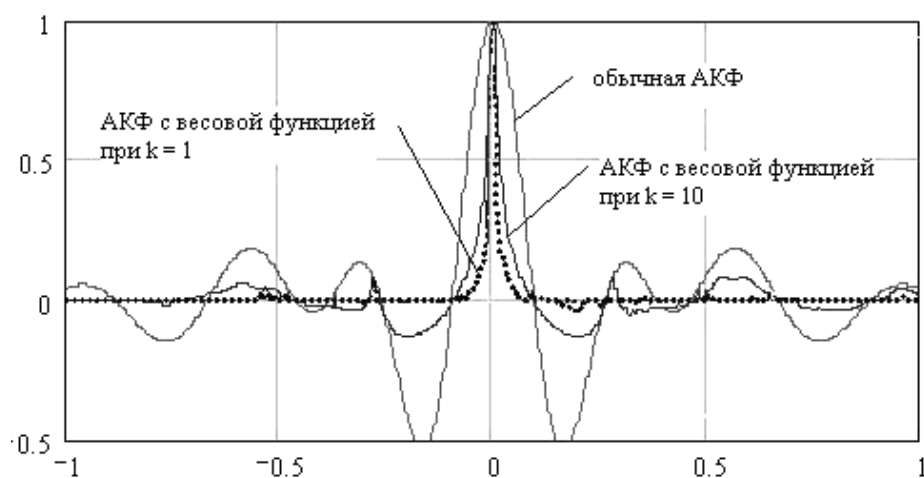


Рис. 7. АКФ узкополосного сигнала с верхней граничной частотой $F_b = 4$ Гц и энергией, сосредоточенной в интервале времени $[0-1,75$ с]

3 Оценка производной функции с ограниченным спектром

Предварительный анализ сигналов, имеющих ограниченный спектр и мощность, позволяет выдвинуть гипотезу о том, что если случайная функция имеет ограниченный спектр и ограниченную дисперсию, то она имеет ограниченные производные.

Рассмотрим сигнал с ограниченным спектром следующего вида:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i si \left(f, t, \frac{i+1}{2f_v} \right), \quad (6)$$

где

$$si(f, t, a) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi f(t-a))}{2\pi f(t-a)} \cdot e^{-\pi f(t-a)^2} & \text{при } |t-a| > 10^{-9}, \\ 1 & \text{при } |t-a| < 10^{-9}. \end{cases} \quad (7)$$

Сигнал вида (6) по сути является представлением функции, имеющей ограниченный спектр, рядом Котельникова по ее n отсчетам. Однако, в отличие от разложения Котельникова, здесь используется ряд с ограниченным числом членов и не функция отсчетов, а весовая функция (7), имеющая также ограниченный спектр, но со значительно более подавленной частотой среза; и, наконец, отличие состоит в том, что формула (6) представляет собой не аппроксимацию функции рядом, а синтез новой функции, которая задана численным вектором A_i .

Весовая функция (7), которую назовем атомарной, и ее спектр представлены на рис. 8, где для сравнения приведена и функция отсчетов Котельникова

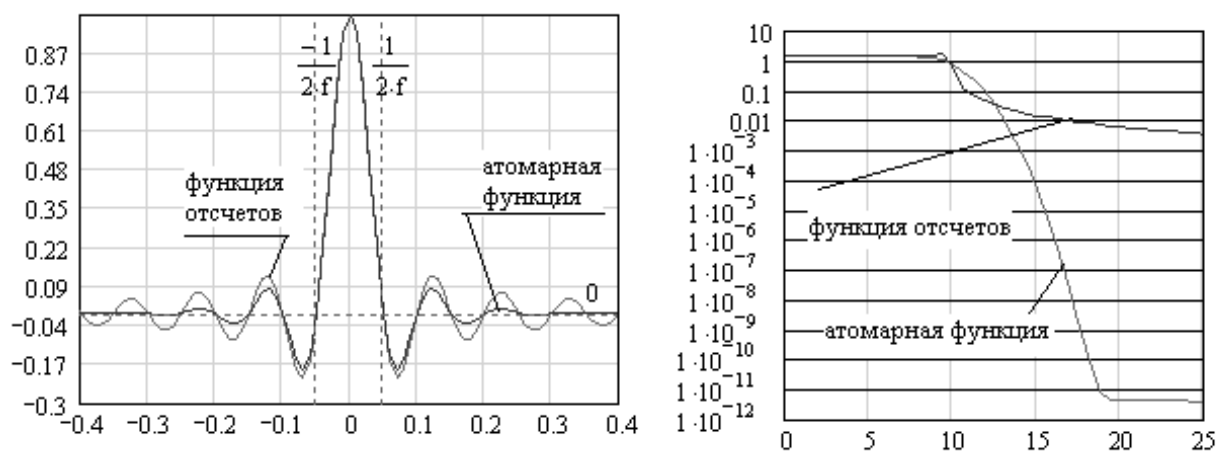


Рис. 8. Графики функции отсчетов и атомарной функции и их спектры для частоты среза $f_v = 10$ Гц

с той же частотой среза. Центральные пики этих функций совпадают, а затухания при удалении от нуля существенно различаются.

Из графиков видно, что атомарная функция затухает значительно быстрее. Известно, что функция отсчетов является весовой функцией идеального фильтра низких частот, поскольку она обеспечивает наибольшую крутизну ската частотной характеристики низкочастотного фильтра. Если сравнить крутизну ската обеих функций на втором графике, видно, что атомарная функция имеет крутизну ската около 120 дБ/октава по мощности, в то время как функция отсчетов такую крутизну имеет только в области частоты среза, а уже на частоте 15 Гц затухание составляет всего 20 дБ.

Для того, чтобы оценить производную по времени от функции со спектром, ограниченным частотой f_v , будем использовать весовую функцию, равную производной от атомарной функции (7) с частотой среза, вчетверо превышающей частоту среза, т. е. $4f_v$.

Если дана функция $u(t)$ со спектром, ограниченным частотой f_v , то оценка производной функции для момента (t) может быть вычислена по формуле:

$$\tilde{u}'(t) = 8f_v \cdot \int_{t - \frac{3}{2f_v}}^{t + \frac{3}{2f_v}} u(\tau) his(t - \tau, 4f_v) d\tau, \quad (8)$$

где

$$his(t, f) = \frac{d}{dt} is(t, f). \quad (9)$$

На рис. 9 приведен график атомарной функции и ее производной. Производная находится путем численного дифференцирования.

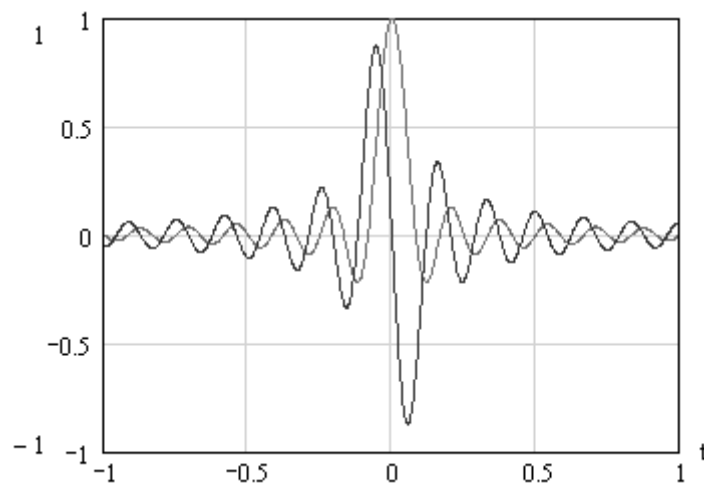


Рис. 9. Атомарная функция с $f_v = 6$ Гц и ее производная, нормированная значением πf_v

Для примера рассмотрим оценку производной сигнала вида

$$u(t) = \sum_{f=1}^{f=f_v} \sin[2\pi ft]. \quad (10)$$

Оценка производной сигнала вида (10) на интервале $\frac{6}{2f_v}$ позволяет заключить: средняя квадратическая погрешность оценки составляет $\sigma = 0,291$, при этом максимальное значение производной составляет $\tilde{u}'(t)_{\max} = 176$, т. е. оценка дана с вполне достаточной для практики точностью.

На рис. 10 приведены графики точной производной функции (10) и ее оценки, полученной по формуле (8). Видно, что оценка практически совпадает с точным значением производной.

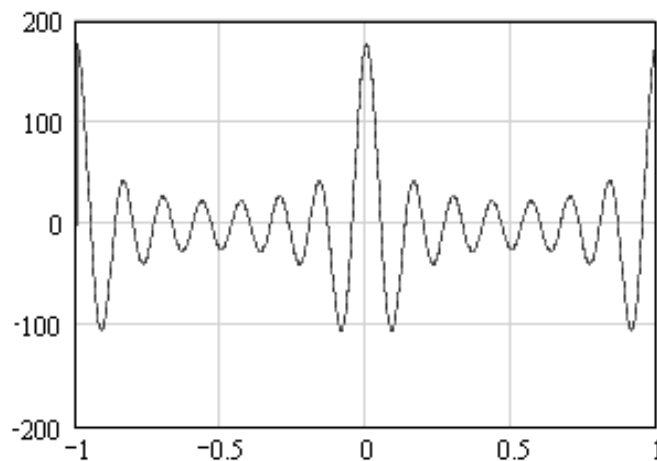


Рис. 10. Точное значение производной и ее оценка

Таким образом, описанный метод оценки производной позволяет использовать полученные оценки для формирования меры подобия сигналов, что, в свою очередь, позволяет осуществлять более эффективное сжатие сигналов. Однако нерассмотренным остается вопрос о влиянии отношения сигнал – шум на работу алгоритма такого метода сжатия сигналов.

4 Применение меры подобия вида (8) для выделения сигналов в шумах

Для оценки возможностей обработки сигналов обобщенной сверткой вида (8) при различных отношениях сигнал – шум в канале связи был проведен вычислительный эксперимент с использованием математического моделирования в среде *MathCad*.

В программе, реализующей математическую модель сигнала и его обработку, сигнал описывался функцией

$$S(t) = \sum_{i=0}^{N-1} A_i si\left(f, t, \frac{i}{2f}\right), \quad (11)$$

где

$$si(f, t, a) = \begin{cases} e^{-\pi f(t-a)^2} \cdot \frac{\sin(2\pi f(t-a))}{2\pi f(t-a)} & \text{при } |t-a| > 10^{-9}, \\ 1 & \text{при } |t-a| \leq 10^{-9}; \end{cases} \quad (12)$$

$A = \text{runif}(N, 2, -2)$ – вектор N случайных величин, равномерно распределенных в интервале $[-2, 2]$.

В модели использованы следующие данные:

$f_s = 32$ Гц – верхняя граничная частота в спектре сигнала;

$N = 48$ – размерность вектора информационных точек сигнала;

$t_n = 0$ с – время начала интервала моделирования;

$t_k = 0,75$ с – время окончания интервала моделирования.

Шум моделировался аналогично (11), отличие состояло в том, что его максимальная амплитуда варьировалась в широком диапазоне с целью изменения отношения сигнал – шум.

На рис. 11–13 представлены результаты моделирования процесса оптимальной обработки сигнала при отношении сигнал – шум = $-0,03$ дБ по мощности.

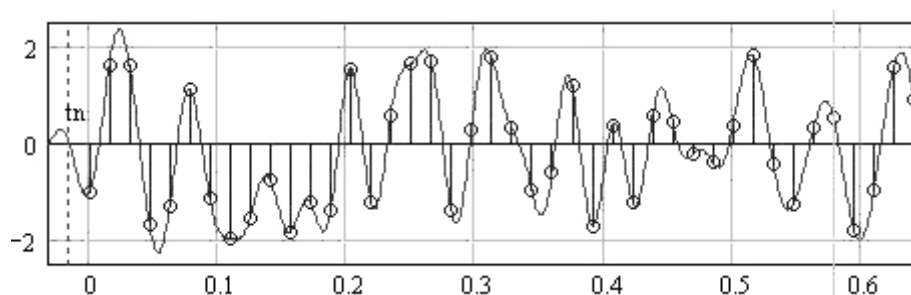


Рис. 11. Сигнал

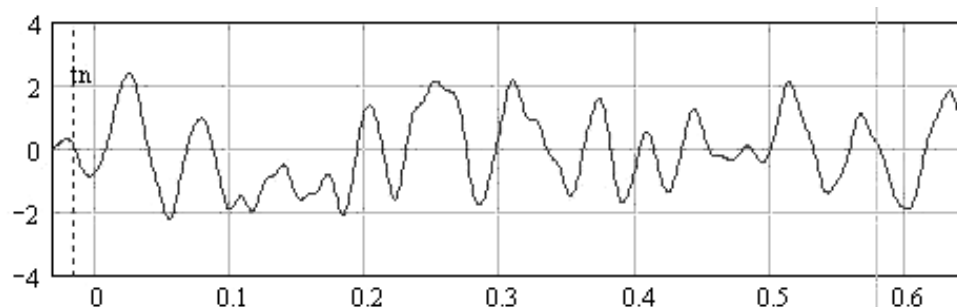


Рис. 12. Смесь сигнала со слабым шумом

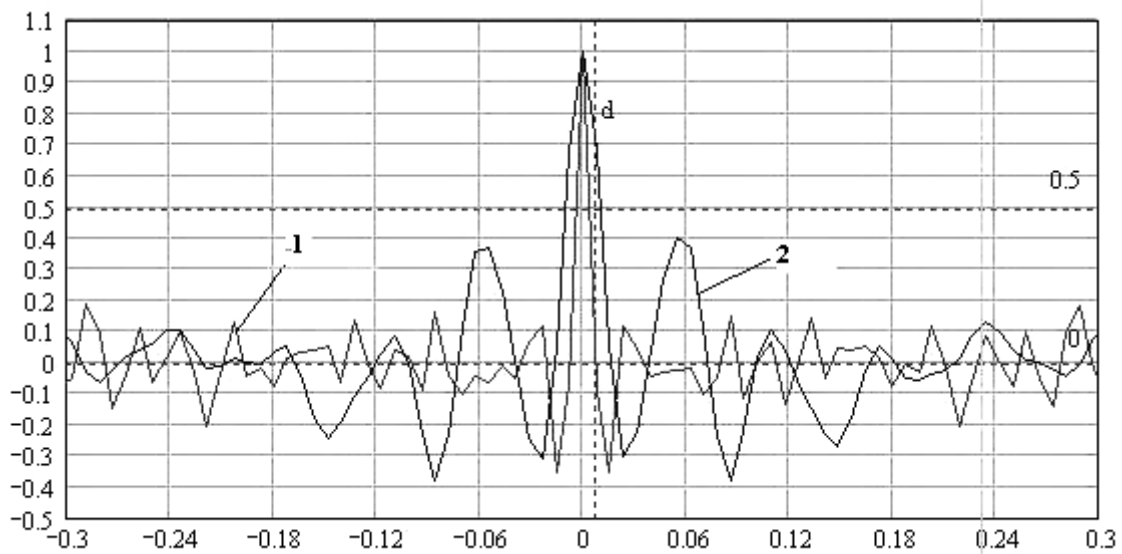


Рис. 13. Выход коррелятора при слабом шуме:
1 – свертка с учетом знака производных; 2 – обычная свертка

Выходы корреляторов при традиционной обработке и обобщенной свертке с учетом знака производных принимаемого и опорного сигналов в условиях незначительного шума, приведенные на рис. 14, показывают, что традиционная свертка дает более значительные боковые всплески и более широкую область высокой корреляции.

На рис. 15–17 представлены результаты моделирования процесса оптимальной обработки сигнала при отношении сигнал – шум, равном -17 дБ

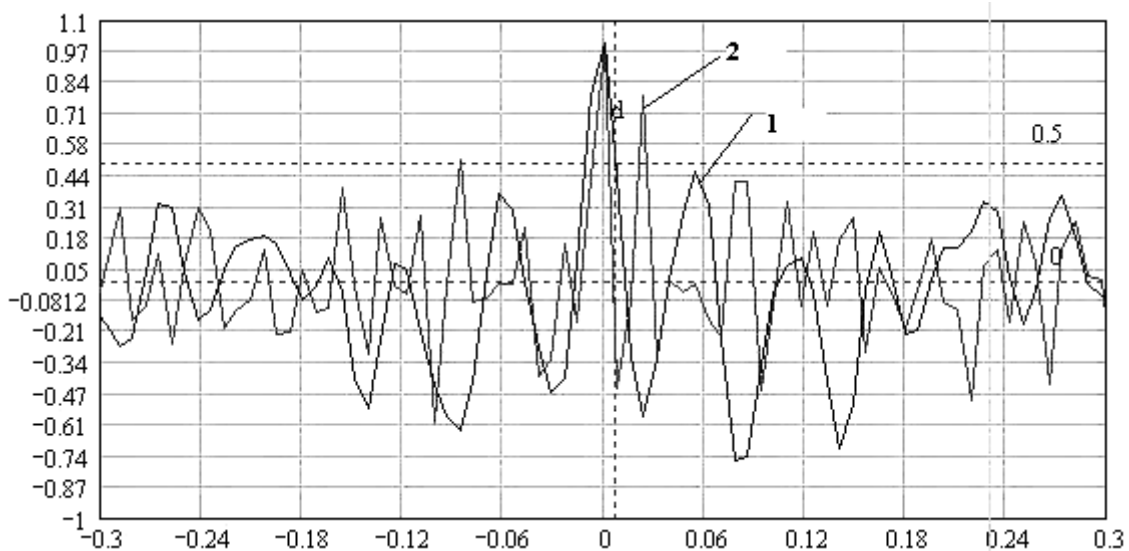


Рис. 14. Выход коррелятора при отношении сигнал – шум, равном 10 дБ:
1 – свертка с учетом знака производных; 2 – обычная свертка

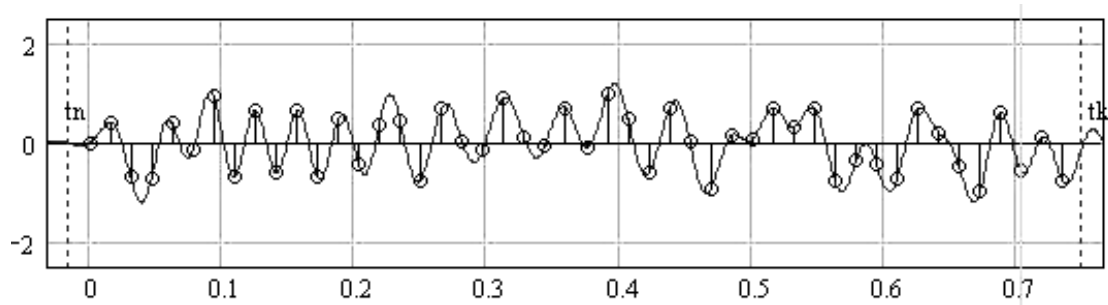


Рис. 15. Псевдослучайный сигнал и его информационные точки

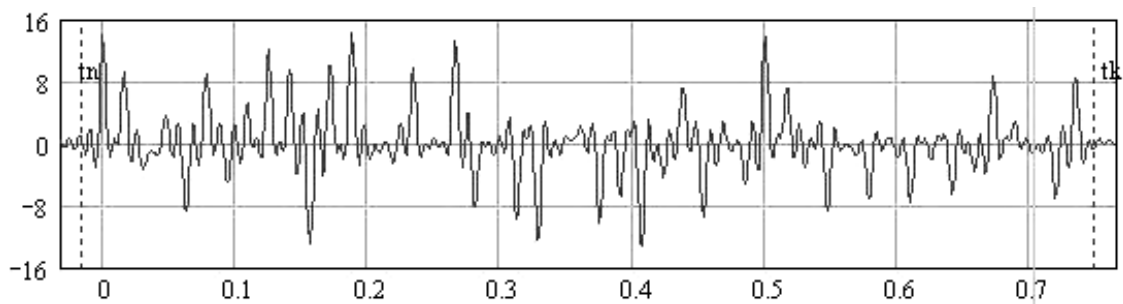


Рис. 16. Аддитивная смесь сигнала и сильного шума

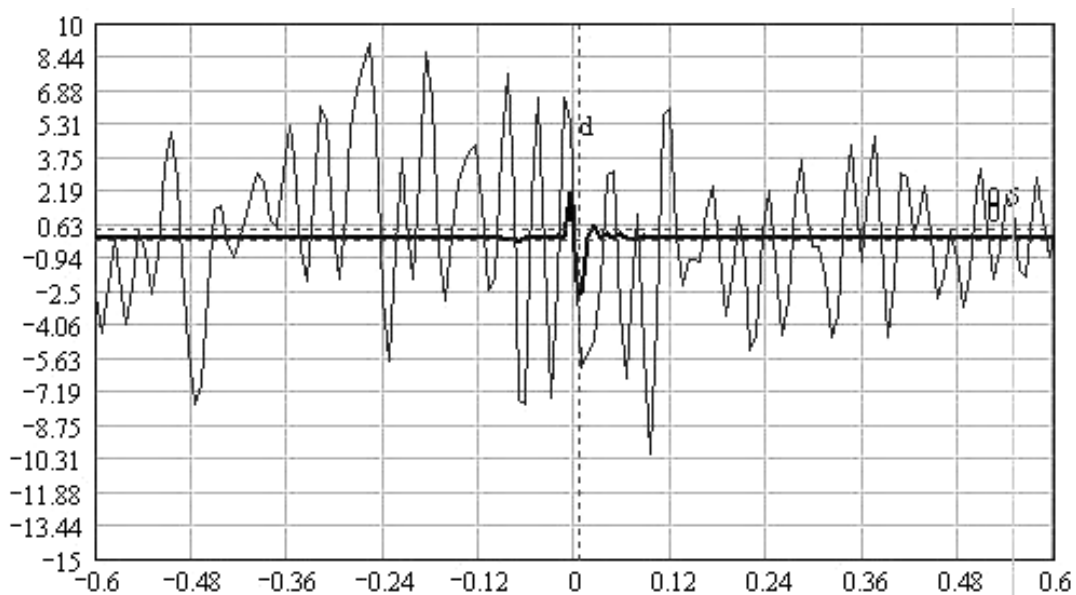


Рис. 17. Выход коррелятора:
тонкая линия – обработка (1); жирная линия – обработка (5)

по мощности и при модернизированной весовой функции, применяемой при вычислении свертки. Модернизация состоит в ее дополнении функцией вида (7).

Сравнение результатов, представленных на рис. 13, 14, 17, показывает, что обработка (1) уступает обработке (5) при сильных шумах.

Заключение

Предложенный подход к обработке сигналов применим в современных системах связи при цифровой обработке. Качество обработки существенно повышается при повышении частоты дискретизации обрабатываемого сигнала. Вычислительные эксперименты по приему различных сигналов показывают, что для получения заметного выигрыша каждый период наивысшей частоты в спектре узкополосного сигнала должен быть опрошен не менее чем 200 раз. Иными словами, если верхняя частота в спектре сигнала равна 25 МГц (стандартная полоса для высокоскоростной передачи данных), то частота опроса должна быть 5 ГГц, что для современных сигнальных процессоров пока недоступно. Указанное требование, конечно, несколько ограничивает возможности предлагаемого метода, но позволяет нацелить основные усилия на разработку многоядерных сигнальных процессоров, применение которых может разрешить указанную проблему.

В СЖАТ применение указанного подхода позволяет заметно повысить качество работы трактов телесигнализации и телеуправления с использованием проводных, оптоволоконных и радиоканалов, поскольку появляется возможность уверенной их работы даже при отношении сигнал – шум, близком к единице.

Библиографический список

1. Попов П. А. Системы управления движением по радиоканалу / П. А. Попов, И. Н. Королев // Автоматика, связь, информатика. – 2011. – № 7. – С. 26–27.
2. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике / К. Шеннон ; пер. с англ. – М. : Иностранная литература, 1963. – 832 с.
3. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1985. – 572 с.
4. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1986. – 384 с.
5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн ; пер. с англ. ; под ред. И. Г. Арамановича. – М. : Наука, 1970. – 832 с.

V. A. Khodakovsky
«Mathematics and Simulation» department,
Petersburg State Transport University

T. V. Khodakovsky
CJSC «Diksi-Yug», St. Petersburg

On similarity measure of narrow band signals

The article proposes a method of processing of the narrow band signals, that provides the possibility to significantly improve the capability of its compression, that allows to process them in the optimum way and to compress in time even those signals that under the standard correlation processing do not have good autocorrelation properties.

digital signals; signal correlation properties; similarity measure; convolution of signals; function with a limited range; noise

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д. С. Марковым

Поступила в редакцию 20.10.2014

Контактная информация: hva1104@mail.ru

© Ходаковский В. А., Ходаковский Т. В., 2015