

УДК 628.14

## Расчет времени промерзания надземного водовода в условиях отрицательных температур

**В. Ф. Лапшин**

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Российская Федерация, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

**Для цитирования:** Лапшин В. Ф. Расчет времени промерзания надземного водовода в условиях отрицательных температур // Известия Петербургского университета путей сообщения. — СПб.: ПГУПС, 2023. — Т. 20. — Вып. 3. — С. 740–750. DOI: 10.20295/1815-588X-2023-3-740-750

### Аннотация

**Цель:** При остановке движения воды в трубопроводе в условиях отрицательных температур возможно его замерзание и разрушение, что приводит к выведению из строя систем водоснабжения на длительный срок. Для безаварийной эксплуатации водовода важно знать время, в течение которого происходит его полное или частичное замерзание. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы изучить физические процессы, происходящие при замерзании, сформулировать основную математическую модель и получить ее численное решение, найти аналитическое решение в квазистационарном приближении, получить формулы, удобные для расчетов времени замерзания, и определить диапазон значений параметров, при которых они справедливы. **Методы:** Математическая модель процесса замерзания опирается на использование закона сохранения энергии. При построении разностной схемы для численного решения нелинейных дифференциальных уравнений модели используется интегро-интерполяционный метод. Для приближенного аналитического решения используется метод разделения уравнений, описывающих процессы, происходящие с разными скоростями. **Результаты:** Сформулирована и обоснована математическая модель замерзания трубопровода при остановке движения воды в условиях постоянной отрицательной температуры окружающей атмосферы. В рамках квазистационарного приближения получены простые формулы для времени замерзания водовода. Установлены критерии применимости этих формул. Выполнено сравнение численного решения уравнений исходной математической модели с результатами, полученными в рамках квазистационарного приближения. **Практическая значимость:** Полученные в работе соотношения позволяют оценить время, в течение которого должны быть выполнены ремонтные работы и восстановлено движение воды в трубопроводе прежде, чем произойдет его разрушение вследствие замерзания.

**Ключевые слова:** Надземный водовод, внутреннее оледенение, время замерзания, математическое моделирование, квазистационарное приближение.

### Введение

Процессы плавления и затвердевания материалов широко распространены и встречаются в самых разных технических областях. В частности, проблемы, связанные с этими процессами, имеют большое значение при эксплуатации систем водоснабжения на объектах транспортной инфраструктуры в условиях отрицательных температур. Замерзание трубопроводов и их последующее

разрушение приводит к большим материальным потерям и нарушению работы систем водоснабжения на длительный срок. В связи с этим изучению процесса внутреннего оледенения трубопроводов посвящено большое число теоретических и экспериментальных работ (см., например, [1–9] и ссылки в них). Как показали многочисленные исследования, при понижении наружной температуры среды до отрицательных значений последовательно про-

исходит охлаждение воды в трубопроводе до температуры замерзания  $T_{ph}$ , образование льда, постепенно заполняющего трубопровод, блокирование воды в трубопроводе, быстрый рост давления и разрыв труб. При этом если начальная температура воды ниже  $10^\circ\text{C}$ , то в случае остановки движения воды в трубопроводе время ее охлаждения до температуры замерзания существенно меньше времени промерзания половины или большей части поперечного сечения трубопровода. По этой причине расчет времени промерзания имеет большое практическое значение: именно оно определяет промежуток времени, в течение которого должны быть выполнены ремонтные работы и восстановлено движение воды в трубопроводе прежде, чем произойдет его разрушение.

В настоящее время для расчетов времени промерзания используются громоздкие аналитические решения уравнения теплопроводности в виде рядов, численные решения в рамках различных моделей либо соотношения, полученные интерполяцией экспериментальных данных. В предлагаемой работе формулируется математическая модель процесса промерзания водовода и анализируются протекающие при этом физические процессы. Рассматривается возможность использования квазистационарного приближения для получения явных соотношений для расчетов времени промерзания. Результаты численного решения уравнений исходной модели сравниваются со значениями, полученными по формулам квазистационарного приближения. Определяется область значений параметров задачи, при которых это приближение применимо.

## 1. Уравнения модели процесса промерзания водовода

В работе рассматривается процесс замерзания неподвижной воды в аксиально-симметричном трубопроводе надземной прокладки с теплоизоляцией. Предполагается, что в исходном состоянии лед в водоводе отсутствует и температура всех

его элементов (воды, стенок трубы и теплоизолятора) равна температуре  $T_{ph}$  фазового перехода вода — лед. В начальный момент времени  $t = 0$  температура внешней среды мгновенно понижается до значения  $T_{ex} < T_{ph}$  и далее в процессе замерзания водовода остается постоянной. Понижение наружной температуры воздуха приводит к образованию кольцевого слоя льда возрастающей толщины на внутренней поверхности трубопровода. При записи уравнений теплофизические параметры всех частей водовода считаются постоянными. В этих условиях уравнение переноса энергии сводится к уравнению теплопроводности, которое при  $t > 0$  может быть записано отдельно для каждого слоя водовода:

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T_1}{\partial r},$$

$$\eta(t) < r < R_1, \text{ для льда,} \quad (1)$$

$$\rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T_2}{\partial r},$$

$$R_1 < r < R_2, \text{ для стенки трубы,} \quad (2)$$

$$\rho_3 c_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = \lambda_3 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T_3}{\partial r},$$

$$R_2 < r < R_3, \text{ для теплоизолятора.} \quad (3)$$

где  $r$  — радиальная переменная,  $t$  — время,  $R_1$  и  $R_2$  — внутренний и наружный радиусы стенки трубопровода,  $R_3$  — внешний радиус теплоизоляции (см. рис. 1),  $T_i(r, t)$ ,  $\rho_i$ ,  $c_i$ ,  $\lambda_i$  — температура, плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность льда ( $i = 1$ ), материала стенки трубы ( $i = 2$ ) и теплоизолятора ( $i = 3$ ),  $\eta(t)$  — радиальная координата границы фазового перехода в момент времени  $t$ .

Начальное условие для всех  $T_i(r, t)$  одинаково и имеет вид:

$$T_i(r, 0) = T_{ph}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

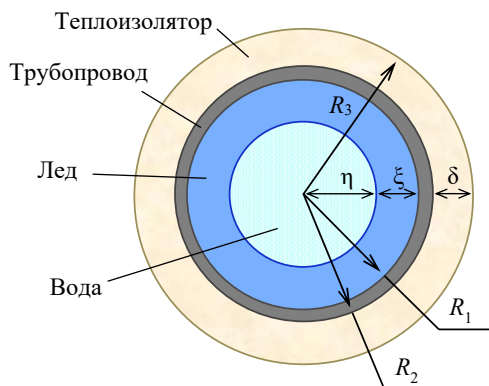


Рис. 1. Поперечное сечение водовода:  $\eta$  — радиус цилиндрического объема воды,  $\xi$  — толщина слоя льда,  $\delta$  — толщина слоя теплоизоляции,  $R_1$  и  $R_2$  — внутренний и наружный радиусы трубы,  $R_3$  — внешний радиус водовода с теплоизоляцией

При записи граничных условий учтем ряд особенностей рассматриваемой задачи. Прежде всего отметим, что внутренняя граница льда всегда находится при температуре фазового перехода:

$$T_1(\eta, t) = T_{ph}. \quad (5)$$

Граничные условия на поверхностях трубопровода при  $r = R_1$  и  $r = R_2$  выражают свойство непрерывности температуры и потоков тепла на границе двух сред:

$$T_1(R_1, t) = T_2(R_1, t), T_2(R_2, t) = T_3(R_2, t). \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1},$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} \Big|_{r=R_2}. \quad (7)$$

Отдельно остановимся на формулировке граничного условия для внешней поверхности водовода. Традиционно [6–8] в качестве такого условия используется закон Ньютона для процесса теплообмена между твердым телом и окружающей его жидкостью или газом:

$$-\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} \Big|_{r=R_3} = \alpha (T_3(R_3) - T_{ex}), \quad (8)$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи.

Для определения  $\alpha$  используют соотношения теории подобия:  $\alpha = \lambda_a Nu / 2R_3$ , где  $\lambda_a$  — коэффициент теплопроводности воздуха,  $Nu$  — число Нуссельта, определяемое экспериментально [10]. Отметим, однако, что значение  $Nu$ , в реальных условиях функционирования водовода, существенно образом зависит от ряда непредсказуемых параметров. К их числу можно отнести направление и скорость ветра, давление атмосферы, влажность воздуха, температуру. Кроме того, даже при одинаковых исходных условиях различия в значениях  $Nu$ , а значит, и  $\alpha$ , полученных разными авторами [7, 10, 11], достигают 20 %. Вместе с тем наличие теплоизоляции приводит к тому, что температуры внешней поверхности водовода и окружающей атмосферы мало отличаются друг от друга. Действительно, как следует из (8), относительная разность температур  $\varepsilon_T = (T_3(R_3) - T_{ex}) / (T_{ph} - T_{ex})$  по порядку величины равна:

$$\varepsilon_T = \frac{2R_3 \lambda_3}{\delta \lambda_a Nu}. \quad (9)$$

где  $\lambda_a$  — теплопроводность воздуха,  $\delta$  — толщина слоя теплоизоляции. Используя значения  $R_3 = 0,3$  м,  $\delta = 0,1$  м,  $\lambda_a = 0,023$  Вт/(м · К) (для сухого воздуха) [10],  $\lambda_3 = 0,04$  Вт/(м · К) [12] и  $Nu = 200$  [7] для поперечной водоводу скорости воздуха  $V = 1$  м/с, получаем  $\varepsilon_T = 0,05$ . При бóльших значениях скорости и влажности воздуха значение  $\varepsilon_T$  будет еще меньше. Таким образом, с более высокой точностью, чем в (8), можно положить

$$T_3(R_3, t) = T_{ex}. \quad (10)$$

Скорость перемещения фазовой границы определяется, в соответствии с законом сохранения энергии, величиной потока тепла, отводимого от этой границы в сторону атмосферы:

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=\eta(t)} = \rho_1 q_1 \frac{d\eta}{dt}. \quad (11)$$

где  $q_1$  — удельная теплота плавления льда.

## 2. Сравнение скоростей физических процессов при промерзании водовода

При промерзании водовода одновременно происходят два различных физических процесса: перемещение фазовой границы вода — лед от внутренней поверхности стенки внутрь трубопровода и выравнивание температуры в различных слоях водовода вследствие теплопроводности. Для сравнения скоростей протекания этих процессов оценим времена, характеризующие их продолжительность.

Как известно, в неравномерно нагретом теле конечных размеров решение уравнения теплопроводности для процесса выравнивания температуры может быть найдено методом разделения переменных. При этом решение имеет вид ряда [13]:

$$T(r, t) = \sum_k c_k f_k(r) \exp(-\gamma_k t). \quad (12)$$

где  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) — набор чисел, при которых существует отличное от нуля решение задачи,  $c_k$  — числовые коэффициенты,  $f_k(r)$  — некоторые функции радиальной переменной.

Скорость выравнивания температуры в теле определяется главным образом членом ряда, содержащим наименьшее значение  $\gamma_k$ . Обозначим его через  $\gamma_{\min}$ . Тогда характерное время выравнивания температуры в теле будет определяться величиной  $t^* = 1/\gamma_{\min}$ . Решение задачи выравнивания температуры в виде ряда (12) получено для

тел различной формы. Воспользуемся соотношениями, приведенными в [14] для  $\gamma_{\min}$  в случаях сплошного и полого цилиндров. Тогда, время выравнивания температуры в слое льда толщиной  $\xi$  будет  $t_1^* = \xi^2 \rho_1 c_1 / \pi^2 \lambda_1$ , а в слое теплоизолятора  $t_3^* = \delta^2 \rho_3 c_3 / \pi^2 \lambda_3$ . Отметим, что время выравнивания температуры в стенке трубы  $t_2^*$ , из-за ее меньшей, чем у теплоизолятора, толщины и большей теплопроводности, значительно меньше, чем  $t_3^*$ .

Для оценки времени  $t_{ph}^*$  образования слоя льда толщиной  $\xi$  проинтегрируем обе части уравнения (1) по промежутку  $(\eta, R_1)$ , предварительно умножив их на переменную  $r$ . В результате, с учетом (11), получим соотношение:

$$-R_1 \lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{R_1} = -\rho_1 c_1 \int_{\eta}^{R_1} r \frac{\partial T_1}{\partial t} dr - \rho_1 q_1 \eta \frac{d\eta}{dt}. \quad (13)$$

Уравнение (13) можно записать в виде:

$$Q_{ex} = Q_c + Q_f,$$

где  $Q_{ex}$  — поток энергии, выходящий из кольцевого слоя льда в процессе замерзания трубопровода,  $Q_c$  — энергия, выделяющаяся в единицу времени в толще льда, в процессе его охлаждения,  $Q_f$  — энергия, выделяющаяся в единицу времени на внутренней поверхности кольцевого льда при замерзании воды.

Отметим, что объем охлаждаемого льда возрастает в процессе промерзания трубопровода пропорционально  $R_1^2 - \eta^2$ . Величина же площади поверхности, на которой выделяется энергия кристаллизации воды, наоборот, уменьшается пропорционально  $\eta$ . Поэтому при замерзании воды в трубопроводе величина  $Q_c$  возрастает от нуля до своего максимального значения в конце этого процесса, а величина  $Q_f$  уменьшается от максимального значения в начале процесса до нулевого значения в конце. Соответственно, на начальном

этапе замерзания трубопровода в поток энергии  $Q_{ex}$  основной вклад вносит энергия  $Q_f$ , выделяющаяся при замерзании воды, а на конечном этапе в  $Q_{ex}$  основной вклад вносит энергия  $Q_c$ , выделяющаяся при охлаждении льда. Для детализации ролей  $Q_c$  и  $Q_f$  введем средние значения  $(\partial T_1 / \partial t)_{cp} = \Delta T_1 / t_{ph}^*$  и  $(d\eta / dt)_{cp} = \xi / t_{ph}^*$ . Перепад температур  $\Delta T_1$  в слое льда толщиной  $\xi$  с помощью условия (7) выражается через  $\Delta T = T_{ph} - T_{ex}$ :

$$\Delta T_1 = \frac{\xi \lambda_3}{\delta \lambda_1} \Delta T. \quad (14)$$

Здесь учтено, что, благодаря малой толщине стенки  $\Delta R = R_2 - R_1$ ,  $\Delta T_1 + \Delta T_3 \approx \Delta T$ . Теперь получаем:

$$\frac{Q_c}{Q_f} = \frac{1}{2} \frac{R_1 \lambda_3 c_1 \Delta T}{\delta \lambda_1 q_1} \frac{1 - (\eta / R_1)^2}{\eta / R_1}.$$

Используем здесь значения  $R_1 / \delta = 5$ ,  $\lambda_3 = 0,04$  Вт/(м · К),  $\lambda_1 = 2,2$  Вт/(м · К),  $c_1 = 2100$  Дж/(кг · К),  $\Delta T = 30$  К и  $q_1 = 0,333 \cdot 10^6$  Дж/(кг · К). Получаем, что  $Q_c > Q_f$  только при  $\eta / R_1 < 0,01$ . Причем уже при  $\eta / R_1 > 0,1$  отношение  $Q_c / Q_f < 0,1$ . Это позволяет при оценке времени перемещения фазовой границы  $t_{ph}^*$  пренебречь первым членом в правой части (13), т. е. величиной  $Q_c$ . Подставляя в (13) значение  $(\partial T_1 / \partial r)|_{R_1} = \Delta T_1 / \xi$  и учитывая соотношение (14), получаем:

$$\rho_1 q_1 \eta \frac{d\eta}{dt} = - \frac{R_1 \lambda_3 \Delta T}{\delta}.$$

Решение этого уравнения при начальном условии  $\eta(0) = R_1$  определяет характерное время намерзания слоя льда толщиной  $\xi = R_1 - \eta$ :

$$t_{ph}^*(\eta) = \frac{R_1 \delta \rho_1 q_1}{2 \lambda_3 \Delta T} \left( 1 - \frac{\eta^2}{R_1^2} \right). \quad (15)$$

Теперь для отношений характерных времен получаем:

$$\frac{t_1^*}{t_{ph}^*} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\xi \lambda_3 c_1 \Delta T}{\delta \lambda_1 q_1} \frac{1}{1 - \xi / 2R_1}, \quad (16)$$

$$\frac{t_3^*}{t_{ph}^*} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\delta \rho_3 c_3 \Delta T}{\xi \rho_1 q_1} \frac{1}{1 - \xi / 2R_1}. \quad (17)$$

Используя значения  $\lambda_1 = 2,2$  Вт/(м · К),  $\lambda_3 = 0,04$  Вт/(м · К),  $\rho_1 = 920$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_3 = 100$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_1 = 2100$  Дж/(кг · К),  $c_3 = 840$  Дж/(кг · К),  $q_1 = 330$  кДж/кг и  $\Delta T = 30$  °С, из (16), (17) получаем, что на всем протяжении процесса промерзания водовода  $t_1^* / t_{ph}^* < 10^{-2}$ , а  $t_3^* / t_{ph}^* = 10^{-3} \delta / \xi$ . Последнее отношение мало всюду, кроме самого начала процесса намерзания льда, когда  $\delta / \xi$  велико. Отметим, что наличие такого краткого этапа не оказывает заметного влияния на расчет времени промерзания трубопровода и в приближенной модели будет считаться, что  $t_3^* / t_{ph}^*$  мало всегда.

Малость отношений  $t_1^* / t_{ph}^*$  и  $t_3^* / t_{ph}^*$  означает, что процесс выравнивания температуры во всех слоях конструкции водовода, в течение большей части времени промерзания, проходит существенно быстрее, чем процесс нарастания слоя льда на внутренней поверхности трубопровода. Соответственно, в каждый момент времени, благодаря теплопроводности, успевает установиться радиальное распределение температуры такое, как если бы фазовая граница была неподвижной.

Это позволяет для получения явных формул для времени промерзания водовода использовать приближенную модель. В этой модели при расчете радиального распределения температуры используются стационарные уравнения теплопроводности (1) — (3) с фиксированной границей при  $r = \eta(t)$ , а перемещение этой границы по-прежнему находится из (11). Такое приближение принято называть квазистационарным.

### 3. Расчет времени промерзания в квазистационарном приближении

Квазистационарное приближение включает в себя стационарные уравнения теплопроводности для каждого слоя водовода:



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T_1}{\partial r} = 0, \quad \eta(t) < r < R_1, \text{ для льда,} \quad (18)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T_2}{\partial r} = 0, \quad R_1 < r < R_2, \text{ для стенки трубы,} \quad (19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T_3}{\partial r} = 0, \quad R_2 < r < R_3, \text{ для теплоизолятора.} \quad (20)$$

Граничные условия для (18) — (20) остаются прежними: (5) — (7) и (10). Уравнения (18) — (20) имеют явное решение:

$$T_i(r) = c_{i1} \ln(r) + c_{i2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Здесь  $c_{i1}$  и  $c_{i2}$  — константы, которые определяются из граничных условий (5) — (7) и (10). После подстановки (21) в граничные условия получаем систему из шести линейных относительно коэффициентов  $c_{i1}$  и  $c_{i2}$  уравнений:

$$\begin{aligned} c_{11} \ln \eta + c_{12} &= T_{ph} \\ c_{11} \ln R_1 + c_{12} &= c_{21} \ln R_1 + c_{22} \\ c_{21} \ln R_2 + c_{22} &= c_{31} \ln R_2 + c_{32} \\ \lambda_1 c_{11} &= \lambda_2 c_{21} \\ \lambda_2 c_{21} &= \lambda_3 c_{31} \\ c_{31} \ln R_3 + c_{32} &= T_{ex} \end{aligned}$$

Решение линейной системы имеет громоздкий вид. Приведем здесь выражение для коэффициента  $c_{11}$ , который необходим для определения положения фазовой границы  $\eta(t)$ :

$$c_{11} = - \frac{T_{ph} - T_{ex}}{\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \ln \eta}. \quad (22)$$

После подстановки (21) в (11) получаем дифференциальное уравнение для  $\eta(t)$ :

$$\frac{\eta d\eta}{c_{11}(\eta)} = \frac{\lambda_1}{\rho_1 q_1} dt.$$

Решение этого уравнения, с учетом (22) и начального условия  $\eta(0) = R_1$ , имеет вид:

$$t^{qu}(\eta) = \frac{\rho_1 q_1}{2\lambda_1(T_{ph} - T_{ex})} \times \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2} \right) \times \left[ \times (R_1^2 - \eta^2) + \eta^2 \ln \frac{\eta}{R_1} \right] \right]. \quad (23)$$

где  $t^{qu}(\eta)$  — время, необходимое для перемещения фазовой границы в точку с радиальной координатой  $\eta$ , т. е. время нарастания слоя льда толщиной  $\xi = R_1 - \eta$ . При решении практических задач важное значение имеют время замерзания половины поперечного сечения  $t_{1/2}^{qu} = t^{qu}(R_1 / \sqrt{2})$  и время полного промерзания трубопровода  $t_f^{qu} = t^{qu}(0)$ . Выражения для этих величин имеют вид:

$$t_{1/2}^{qu} = \frac{\rho_1 q_1 R_1^2}{4\lambda_1(T_{ph} - T_{ex})} \times \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2}(1 - \ln 2) \right], \quad (24)$$

$$t_f^{qu} = \frac{\rho_1 q_1 R_1^2}{2\lambda_1(T_{ph} - T_{ex})} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2} \right). \quad (25)$$

Как видно из (24) и (25), время полного промерзания практически вдвое больше времени замерзания половины поперечного сечения:  $t_f^{qu} \approx 2t_{1/2}^{qu}$ .

Отметим здесь, что в реальных условиях температура наружной поверхности водовода всегда несколько выше, чем температура окружающей среды (в работе предполагается, что  $T_{ex} = \text{const}$  и  $T_{ex} < 0^\circ\text{C}$ ). Это приводит к тому, что значения времени промерзания, полученные при использовании условия (10), всегда будут несколько меньше, чем в действительности. Относительная погрешность времени промерзания  $\varepsilon_f$  определяется при этом, очевидно, соотношением (9):  $\varepsilon_f = \varepsilon_T$ .

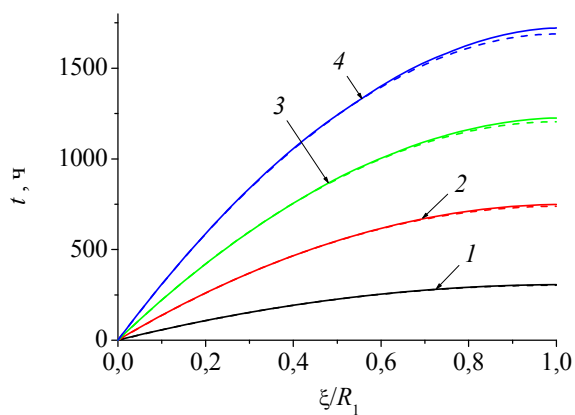
#### 4. Результаты вычислений и обсуждение

Зависимость времени промерзания водовода от основных параметров задачи хорошо видна из соотношений (23) — (25). Прежде всего отметим, что время промерзания прямо пропорционально плотности  $\rho_1$  и удельной теплоте плавления льда  $q_1$  и обратно пропорционально разности температур плавления и наружного воздуха  $\Delta T = T_{ph} - T_{ex}$ . Зависимость от остальных параметров более сложная. Приближенно, с точностью до малых членов порядка  $\lambda_3/\lambda_1$  и  $\lambda_3/\lambda_2$ , время промерзания зависит только от теплопроводности теплоизолятора  $\lambda_3$  ( $t \sim 1/\lambda_3$ ) и практически не зависит от теплопроводности льда  $\lambda_1$  и материала стенки трубопровода  $\lambda_2$ . С той же точностью время промерзания не зависит и от толщины стенок трубопровода. Зависимость от внутреннего радиуса трубопровода  $R_1$  и толщины слоя теплоизоляции  $\delta$  имеет вид  $t \sim (R_1)^2 \ln(1 + \delta/R_1)$ . Это означает, что при малых значениях  $\delta/R_1 < 1$  время промерзания практически прямо пропорционально произведению  $t \sim \delta R_1$ . При больших значениях  $\delta/R_1 > 1$  время  $t$  зависит от  $R_1$  значительно сильнее:  $t \sim (R_1)^2 \ln(\delta/R_1)$ . При этом зависимость от  $\delta$  — логарифмическая, т. е. очень слабая.

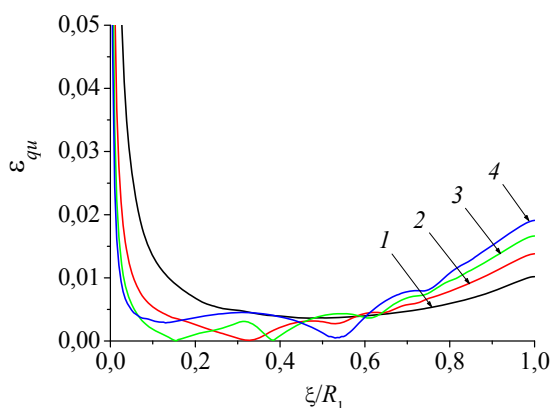
Для прямой проверки точности квазистационарного приближения (23) в работе была численно решена исходная система уравнений (1) — (3) с условиями (4) — (7), (10) и (11). С этой целью интегро-интерполяционным методом [15] была

построена разностная схема первого порядка точности по времени и второго порядка точности по радиальной переменной. Результаты расчетов приведены на рис. 2, 3. Во всех вычислениях использовалось значение толщины стенок трубопровода  $\Delta R = 10$  мм. На рис. 2, а приведены графики зависимости времени нарастания слоя льда от его толщины  $t(\xi/R_1)$ , полученные численным решением (1) — (3) и в квазистационарном приближении (23). На рис. 2, б показаны значения относительной погрешности квазистационарного приближения  $\varepsilon_{qu}(\xi) = (t(\xi) - t^{qu}(\xi))/t(\xi)$  в процессе промерзания. Хорошо видно, что погрешность квазистационарного приближения  $\varepsilon_{qu}$  на протяжении большей части процесса промерзания не превышает 1 %. В самом начале этого процесса погрешность резко возрастает. Это объясняется тем, что при малых значениях  $\xi$  отношение  $t_3^*/t_{ph}^*$  в (19) возрастает и критерий применимости квазистационарного приближения нарушается. Некоторое увеличение погрешности  $\varepsilon_{qu}$  в конце процесса промерзания объясняется возрастанием на конечном этапе роли энергии, выделяющейся при охлаждении водовода и не учитываемой в квазистационарном приближении.

На рис. 3, а приведены результаты расчетов времени промерзания половины поперечного сечения трубопровода  $t_{1/2}$  в зависимости от его внутреннего радиуса  $R_1$  при различных значениях толщины слоя теплоизоляции  $\delta$ , а на рис. 3, б — относительная погрешность  $\varepsilon_{1/2}$  этого времени, рассчитанного в квазистационарном приближении (24):  $\varepsilon_{1/2} = |t_{1/2} - t_{1/2}^{qu}|/t_{1/2}$ . Хорошо видно, что величина  $\varepsilon_{1/2} \sim 1\%$  при условии, что  $\delta/R_1 < 1$ . В случае, когда  $\delta/R_1 > 1$ , из (24) следует, что характерное время  $t_{ph}^* \sim (R_1)^2 \ln(1 + \delta/R_1)$ , и вместо (19) получаем  $t_3^*/t_{ph}^* \approx 0,004(\delta/R_1)^2$ . При больших значениях  $\delta/R_1$  скорость промерзания становится сравнимой или даже больше, чем скорость процесса выравнивания температуры в теплоизоляторе. При этом критерий применимо-

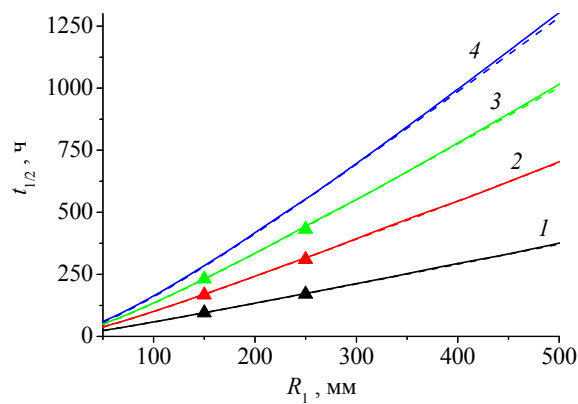


a

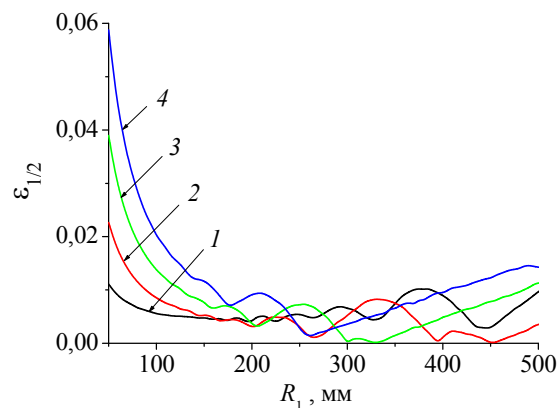


б

Рис. 2. Динамика роста кольцевого слоя льда при температуре наружного воздуха  $T_{ex} = -20\text{ }^\circ\text{C}$ , толщине слоя теплоизоляции  $\delta = 100\text{ мм}$  и различных значениях  $R_1$ : 1 — 100 мм, 2 — 200 мм, 3 — 300 мм, 4 — 400 мм; а — зависимость  $t(\xi/R_1)$  времени намерзания слоя льда от его относительной толщины: сплошные линии — численный расчет, пунктир — квазистационарное приближение (23); б — относительная погрешность  $\epsilon_{qu}$  квазистационарного приближения (23) в процессе промерзания



a



б

Рис. 3. Зависимость времени промерзания половины поперечного сечения трубопровода  $t_{1/2}$  (а) и относительной погрешности квазистационарного приближения  $\epsilon_{1/2} = |t_{1/2} - t_{qu}^{1/2}|/t_{1/2}$  (б) от величины внутреннего радиуса трубопровода  $R_1$  при температуре наружного воздуха  $T_{ex} = -30\text{ }^\circ\text{C}$  и различных значениях толщины слоя теплоизоляции  $\delta$ : 1 — 50 мм, 2 — 100 мм, 3 — 150 мм, 4 — 200 мм. Сплошные линии — численный расчет, пунктир — квазистационарное приближение (24),  $\blacktriangle, \blacktriangleright, \blacktriangleleft$  — данные [6]

сти квазистационарного приближения нарушается и погрешность  $\epsilon_{1/2}$  резко возрастает.

Отметим здесь, что результаты расчетов отличаются от результатов, полученных в [6] при использовании граничного условия (8) и значениях  $R_1 = 150\text{ мм}$  и  $R_1 = 250\text{ мм}$ , не более чем на 2 %.

### Заключение

В настоящей работе выполнен анализ процесса промерзания надземного водовода после прекращения движения в нем воды. Сформулирована математическая модель процесса промерзания для случая постоянной отрицательной температуры наружного воздуха. Для широкого диапа-



зона параметров водовода численно исследована динамика промерзания. Для времени промерзания водовода в рамках квазистационарного приближения получены простые формулы и установлены критерии их применимости. Выполнено сравнение численного решения уравнений исходной математической модели с результатами, полученными в рамках квазистационарного приближения.

Результаты, полученные в работе, позволяют оценить время, в течение которого должны быть выполнены ремонтные работы и восстановлено движение воды в трубопроводе прежде, чем произойдет его разрушение вследствие перемерзания.

### Библиографический список

1. Богословский П. А. Ледовый режим трубопроводов гидроэлектрических станций / П. А. Богословский. — М.; Л.: Госэнергоиздат, 1950. — 154 с.
2. Жидких В. М. Ледовый режим трубопроводов / В. М. Жидких, Ю. А. Попов. — Л.: Энергия, 1979. — 132 с.
3. Cheng K. C. Freezing and melting heat transfer in engineering: Selected topics on ice-water systems and welding and casting processes / K. C. Cheng, N. Seki. — New York: Hemisphere, 1991. — 815 p.
4. Gordon J. R. An Investigation into Freezing and Bursting Water Pipes in Residential Construction / J. R. Gordon // Research Report, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, USA. — 1996. — Iss. 96-1P. — Pp. 1–51. — URL: <https://www.ideals.illinois.edu/items/54859>.
5. Akyurt M. Freezing phenomena in ice-water systems / M. Akyurt, G. Zaki, B. Habeebullah // Energy Conversion and Management. — 2002. — Vol. 43. — Pp. 1773–1789.
6. Терехов Л. Д. Технологические основы энергосбережения при подаче воды по водоводам на Севере: дисс. ... д-ра техн. наук / Л. Д. Терехов. — Хабаровск: Дальневосточный государственный университет путей сообщения, 1999. — 275 с.
7. McDonald A. Mathematical simulation of the freezing time of water in small diameter pipes / A. McDonald, B. Bscheiden, E. Sullivan et al. // Applied Thermal Engineering. — 2014. — Vol. 73(1). — Pp. 142–153.
8. Hongfei Xu. Modelling ice and wax formation in a pipeline in the Arctic environment / Xu Hongfei, H. Dali, S. Yue et al. // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. — 2020. — Vol. 66. — Pp. 104197. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2020.104197>.
9. Терехов Л. Д. Внутреннее обледенение водоводов в зимний период / Л. Д. Терехов, Н. В. Твардовская, Е. А. Твардовская // III Бетанкуровский международный инженерный форум: сборник трудов, Санкт-Петербург, 2–3 декабря 2021 года. — СПб: ФГБОУ ВО ПГУПС, 2021. — Т. 2. — С. 161–164.
10. Михеев М. А. Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеева. — М.: Энергия, 1977. — 344 с.
11. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе. — М.: Атомиздат, 1979. — 416 с.
12. ГОСТ 21880—2011. Маты из минеральной ваты прошивные теплоизоляционные / Редактор В. Н. Копысов. — М.: Стандартинформ, 2012. — 10 с.
13. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
14. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.
15. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1989. — 616 с.

Дата поступления: 01.08.2023

Решение о публикации: 31.08.2023

### Контактная информация:

ЛАПШИН Владимир Федорович — д-р физ.-мат. наук, проф.; [lapshinvf@mail.ru](mailto:lapshinvf@mail.ru)

## Freezing Time Calculation of the Above-Ground Water Pipeline Under Conditions of Negative Temperatures

V. F. Lapshin

Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, 9, Moskovsky pr., Saint Petersburg, 190031, Russian Federation

**For citation:** Lapshin V. F. Freezing Time Calculation of the Above-Ground Water Pipeline Under Conditions of Negative Temperatures // *Proceedings of Petersburg Transport University*, 2023, vol. 20, iss. 3, pp. 740–750. (In Russian). DOI: 10.20295/1815-588X-2023-3-740-750

### Summary

**Purpose:** When the water movement in the pipeline is stopped in conditions of negative temperatures, its freezing and destruction are possible, which leads to the failure of water supply systems for a long time. For accident-free operation of the water pipeline, it is important to know the time during which its complete or partial freezing occurs. The purpose of this work is to study the physical processes that occur during freezing, to formulate the basic mathematical model and its numerical solution, to build an analytical solution in a quasi-stationary approximation, to obtain formulas that are convenient for freezing time calculation and to determine the range of parameter values at which they are valid. **Methods:** The mathematical model of the freezing process relies on the use of energy conservation law. When constructing a difference scheme, the integro-interpolation method is used to numerically solve the nonlinear differential equations of the model. To obtain an approximate analytical solution, the method of separating equations describing processes that occur at different speeds, is used. **Results:** The mathematical model of pipeline freezing during water movement shutdown under conditions of constant negative temperature of the surrounding atmosphere has been formulated and substantiated. Within the framework of the quasi-stationary approximation, simple formulas for the freezing time of the water pipeline have been obtained. The criteria for the applicability of these formulas have been established. The numerical solution of equations of initial mathematical model is compared with the results obtained within quasi-stationary approximation. **Practical significance:** The ratios obtained in the work make it possible to estimate the time during which repair work should be carried out and the movement of water in the pipeline should be restored before its destruction due to freezing occurs.

**Keywords:** Above-ground water pipeline, internal icing, freezing time, mathematical modeling, quasi-stationary approximation.

### References

1. Bogoslovskiy P. A. *Ledovyy rezhim truboprovodov gidroelektricheskikh stantsiy* [Ice regime of pipelines of hydroelectric stations]. Moscow; Leningrad: Gosenergoizdat Publ., 1950, 154 p. (In Russian)
2. Zhidkikh V. M., Popov Yu. A. *Ledovyy rezhim truboprovodov* [Ice regime of pipelines]. Leningrad: Energiya Publ., 1979, 132 p. (In Russian)
3. Cheng K. C., Seki N. Freezing and melting heat transfer in engineering: Selected topics on ice-water systems and welding and casting processes. New York: Hemisphere, 1991, 815 p.
4. Gordon J. R. An Investigation into Freezing and Bursting Water Pipes in Residential Construction. Research Report, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, USA, 1996, Iss. 96-1P, pp. 1–51. URL: <https://www.ideals.illinois.edu/items/54859>.
5. Akyurt M., Zaki G., Habeebullah B. Freezing phenomena in ice–water systems. *Energy Conversion and Management*, 2002, vol. 43, pp. 1773–1789.

6. Terekhov L. D. *Tekhnologicheskie osnovy energosberazheniya pri podache vody po vodovodam na Severe: diss. ... d-ra tekhn. nauk* [Technological foundations of energy saving when supplying water through water lines in the North: diss. ... Dr. tech. Sciences]. Khabarovsk: Dal'nevostochnyy gosudarstvennyy universitet putey soobshcheniya Publ., 1999, 275 p. (In Russian)
7. McDonald A., Bscheiden B., Sullivan E. et al. Mathematical simulation of the freezing time of water in small diameter pipes. *Applied Thermal Engineering*, 2014, vol. 73(1), pp. 142–153.
8. Hongfei Xu., Dali H., Yue S. et al. Modelling ice and wax formation in a pipeline in the Arctic environment. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 2020, vol. 66, pp. 104197. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2020.104197>.
9. Terekhov L. D., Tvardovskaya N. V., Tvardovskaya E. A. *Vnutrennee obledenenie vodovodov v zimniy period. III Betankurovskiy mezhdunarodnyy inzhenernyy forum: sbornik trudov, Sankt-Peterburg, 2–3 dekabrya 2021 goda* [Internal icing of conduits in winter. III Betancourt International Engineering Forum: Proceedings, St. Petersburg, December 2–3 2021]. St. Petersburg: FGBOU VO PGUPS Publ., 2021, vol. 2, pp. 161–164. (In Russian)
10. Mikheev M. A., Mikheeva I. M. *Osnovy teplopere-dachi* [Fundamentals of heat transfer]. Moscow: Energiya Publ., 1977, 344 p. (In Russian)
11. Kutateladze S. S. *Osnovy teorii teploobmena* [Fundamentals of the theory of heat transfer]. Moscow: Atomizdat Publ., 1979, 416 p. (In Russian)
12. *GOST 21880—2011. Maty iz mineral'noy vaty proshivnye teploizolyatsionnye. Redaktor V. N. Kopysov* [GOST 21880—2011. Heat-insulating pierced mineral wool mats. Editor V. N. Kopysov]. Moscow: Standartinform Publ., 2012, 10 p. (In Russian)
13. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika: Uchebnoe posobie. V 10 t. T. VI. Gidrodinamika* [Theoretical Physics: Textbook. In 10 vol. Vol. VI. Hydrodynamics]. Moscow: Nauka Publ., 1986, 736 p. (In Russian)
14. Lykov A. V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conduction]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1967, 600 p. (In Russian)
15. Samarskiy A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of difference schemes]. Moscow: Nauka Publ., 1989, 616 p. (In Russian)

Received: August 01, 2023

Accepted: August 31, 2023

**Author's information:**

Vladimir F. LAPSHIN — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; [lapshinvf@mail.ru](mailto:lapshinvf@mail.ru)