

УДК 536.24

Математическое моделирование процесса промерзания грунтов земляного полотна железных дорог в условиях холодного климата

С. Ван, А. Ф. Колос, А. В. Петряев

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Российская Федерация, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

Для цитирования: Ван С., Колос А. Ф., Петряев А. В. Математическое моделирование процесса промерзания грунтов земляного полотна железных дорог в условиях холодного климата // Известия Петербургского университета путей сообщения. — СПб.: ПГУПС, 2022. — Т. 19. — Вып. 4. — С. 820–831. DOI: 10.20295/1815-588X-2022-4-820-831

Аннотация

Цель: Разрабатывается математическая модель для изучения процесса промерзания грунтов с учетом миграции влаги, и выполняется численное моделирование температурного режима земляного полотна железных дорог при нестационарном процессе в условиях холодного климата. **Методы:** Численная реализация модели выполнена обработкой математического модуля в программе COMSOL Multiphysics, основанной на дифференциальных уравнениях в частных производных (PDE) методом конечных элементов. Достоверность модели подтверждается сравнением с предыдущими экспериментальными данными и результатами моделирования другими авторами. **Результаты:** Результаты расчета на основе разработанной модели показывают лучшую коррелированность с экспериментальными данными по сравнению с результатами других моделей. Представлены пример вычисления и результаты расчета температурного режима земляного полотна в пятом цикле промерзания — оттаивания. Выполнен анализ изменения глубины промерзания грунтов и изменения колебания температуры грунтов по глубине на пятый год. **Практическая значимость:** Разработанная математическая модель дает возможность прогнозировать глубину промерзания грунта с учетом миграции влаги, в том числе изменение глубины промерзания и оттаивания, вызванных потеплением климата. Разработанная модель может быть использована как для изучения закономерности распределения теплового режима земляного полотна при промерзании и оттаивании, так и для совершенствования конструкции земляного полотна, чтобы защитить его от морозного пучения грунтов.

Ключевые слова: Промерзание грунта, температурный режим, миграция влаги, численное моделирование, земляное полотно.

Введение

Грунты земляного полотна подвергаются сезонному промерзанию в условиях холодного климата, что вызывает ряд особых инженерно-геологических проблем. Одной из них является

морозное пучение, действие которого вызывает повреждения и деформации земляного полотна. В связи с этим исследование изменения теплового режима земляного полотна актуально для понимания морозного пучения.

Промерзание грунта является сложным процессом теплопереноса, сопровождаемым теплообменом, фазовым переходом поровой влаги и ее миграцией. Для математического описания этого процесса А. В. Лыков и Ю. А. Михайлов в работе [1] разработали математическую модель, представляющую из себя систему дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса, которую можно решить строго аналитически только в некоторых случаях. На основе их работ Н. С. Иванов [2] предложил разные системы уравнений теплопереноса в протаивающих, промерзающих и промерзших горных породах и представил некоторые методы решения уравнений тепло- и массопроводности. В работах А. Р. Павлова и М. В. Матвеевой [3–5] разработана математическая модель для совместной задачи теплопереноса и построена итерационная разностная схема для численного решения задачи. За рубежом Р. Л. Харлан (R. L. Harlan) [6] предложил гидродинамическую модель для решения задачи теплопереноса и баланса энергии в промерзающих грунтах, но из-за отсутствия надежных данных о физических, тепловых и гидравлических свойствах мерзлых грунтов в его работе не проведено количественное сравнение наблюдаемых данных с результатами расчета. Sheppard, Kay и Loch [7], Jansson и Halldin [8], Taylor и Luthin [9] предложили аналогичные модели для решения совместной задачи теплопереноса при промерзании грунтов. В их работах модели подтверждены лабораторными и полевыми данными. На практике в математическом моделировании процесса теплопереноса при промерзании грунтов широко используются различные модификации модели, представленной Харланом [10–13].

В настоящей работе разрабатывается математическая совмещенная модель для описания теплового режима при нестационарном процессе промерзания грунтов с учетом миграции влаги. Достоверность модели подтверждается срав-

нением с предыдущими экспериментальными данными и результатами моделирования. Кроме этого, приведен пример численного моделирования теплового режима земляного полотна железных дорог и выполнен анализ расчетных результатов температурного режима.

Математическая модель

Математическая модель базируется на основе теории теплопроводности и ненасыщенной влагопроводности, при этом система дифференциальных уравнений опирается на следующие предпосылки: грунт является изотропным и однородным материалом, находящимся в локальном термодинамическом равновесии; твердые частицы грунта и лед не деформируются; не учитывается конвективная теплопередача при миграции влаги по сравнению с потоком теплопроводности и скрытой теплотой фазового перехода.

Основное уравнение температурной задачи выведено на основе закона сохранения энергии, в том числе величина теплового потока определяется законом Фурье, а выражение в двухмерном случае при промерзании грунта имеет вид:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + L \rho_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t}, \quad (1)$$

где C — объемная теплоемкость грунта, Дж/(м³ · К);
 λ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К);
 L — удельная теплота фазового перехода, Дж/кг;
 ρ_i — плотность льда, кг/м³;
 θ_i — суммарная льдистость мерзлого грунта, м³/м³;
 T — температура, К;
 t — время, с.

Основное уравнение влажностной задачи получено на основе закона сохранения массы, в том числе величина потока миграции воды определяется законом Дарси (уравнением Ричардса [14]).

Выражение в двумерном случае при промерзании грунта имеет вид:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} + \frac{\rho_i}{\rho_w} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta_w) \frac{\partial \theta_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D(\theta_w) \frac{\partial \theta_w}{\partial y} + K(\theta_w) \right), \quad (2)$$

где θ_w — объемная влажность мерзлого грунта за счет незамерзшей воды, м³/м³;

ρ_w — плотность воды, кг/м³;

$D(\theta_w)$ — коэффициент диффузии влаги, который определяется как отношение коэффициента влагопроводности к удельной влагоемкости, м²/с;

$K(\theta_w)$ — коэффициент влагопроводности в ненасыщенной зоне, м/с.

Суммарная объемная влажность θ при промерзании грунта определяется по закону сохранения массы:

$$\theta = \theta_w + \frac{\rho_i}{\rho_w} \theta_i. \quad (3)$$

В уравнениях (1) и (2) существуют три неизвестные переменные: температура T , суммарная льдистость мерзлого грунта θ_i , иная влажность мерзлого грунта за счет незамерзшей воды θ_w . Для решения модели необходимо ввести дополнительное уравнение, которое описывает взаимосвязь между температурой T , льдистостью θ_i , и влажностью θ_w . В работе Б. Цинбо [13] предложено соотношение B_I между суммарной льдистостью θ_i и объемной влажностью мерзлого грунта за счет незамерзшей воды θ_w , которое описывается кусочной функцией в виде:

$$B_I = \frac{\theta_i}{\theta_w} = \begin{cases} 1, 1 \left(\frac{T - 273,15}{T_{bf} - 273,15} \right)^b - 1, 1, & T < T_{bf}, \\ 0, & T \geq T_{bf} \end{cases}, \quad (4)$$

где T_{bf} — температура начала замерзания грунта, К;

b — коэффициент, зависящий от вида и засоленности грунтов. При отсутствии экспериментальных данных принимается 0,56 для глины, 0,47 для суглинка, 0,61 для песка. Система уравнений замыкается дополнительным уравнением:

$$\theta_i = \theta_w \cdot B_I. \quad (5)$$

Для получения единственного решения системы уравнений тепломассопереноса необходимо знать краевые (начальные и граничные) условия и геометрическую форму тела. Обычно начальные условия задают распределение температуры или влажности внутри тела в начальный момент. Граничные условия описываются законом взаимодействия поверхности тела с окружающей средой на границах. Общие типы граничных условий включают граничные условия Дирихле и граничные условия Неймана.

В данной работе теплофизические характеристики грунта определены в соответствии с СП 25.13330.2012 [15]. Для определения коэффициента теплопроводности введена ступенчатая функция $H(T)$, связанная с температурой начала замерзания грунта:

$$\lambda = \lambda_f + (\lambda_{th} - \lambda_f) \cdot H(T), \quad (6)$$

где λ_f — коэффициент теплопроводности в мерзлом состоянии, Вт/(м · К);

λ_{th} — коэффициент теплопроводности в талом состоянии, Вт/(м · К).

Объемные теплоемкости в талом и мерзлом состояниях определяются по средневзвешенной массе каждого состава:

$$C_{th} = C_p \cdot \rho_d + C_w \cdot \rho_w \cdot \theta_w; \quad (7)$$

$$C_f = C_p \cdot \rho_d + C_w \cdot \rho_w \cdot \theta_w + C_i \cdot \rho_i \cdot \theta_i, \quad (8)$$

где C_{th} — объемная теплоемкость грунта в талом состоянии, Дж/(м³ · К);

C_f — объемная теплоемкость грунта в мерзлом состоянии, Дж/(м³ · К);

C_p — удельная теплоемкость скелета грунта, Дж/(кг · К);

C_w, C_i — удельная теплоемкость воды и льда, Дж/(кг · К);

ρ_d — плотность скелета грунта, кг/м³.

Соответственно, для описания основных гидрофизических параметров выбраны аппроксимирующие функции на основе модели Муалема-Ван Генухтена [16, 17]. Таким образом, коэффициент влагопроводности $K(\theta)$, удельная влагоемкость $C_w(\theta)$ и коэффициент диффузии влаги $D(\theta)$ выражают в видах:

$$K(\theta) = k_s \cdot S_e^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - \left(1 - S_e^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2; \quad (9)$$

$$C_w(\theta) = \frac{-am}{1-m} (\theta_s - \theta_r) S_e^{\frac{1}{m}} \left(1 - S_e^{\frac{1}{m}} \right)^m; \quad (10)$$

$$D(\theta) = \frac{K(\theta)}{C_w(\theta)}. \quad (11)$$

В том числе эффективная степень насыщения водой S_e определена путем нормализации объемной влажности в следующем виде:

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}, \quad (12)$$

где θ_r — остаточная объемная влажность, соответствующая влажность точки перегиба в сорбционной части, м³/м³;

θ_s — насыщенная объемная влажность, соответствующая полному насыщению водой, м³/м³;

a, m — эмпирические параметры, связанные со свойствами грунта;

k_s — коэффициент фильтрации, м/с.

С учетом сопротивления льда в порах грунта миграции незамерзающей влаги коэффициент влагопроводности и коэффициент диффузии влаги в мерзлых грунтах определяются с помощью коэффициента сопротивления I , связанного с влажностью твердой фазы θ_i [9]:

$$I = 10^{10\theta_i}. \quad (13)$$

Численная реализация

Численное решение задачи выполнено в программе COMSOL Multiphysics. Учитывая взаимную связь и нелинейные характеристики уравнений (1) и (2) в мерзлой зоне, модель построена путем математического интерфейса на основе дифференциальных уравнений в частных производных (PDE). Нестационарный процесс переноса выражается в коэффициентной форме уравнением в частных производных в общем виде [18]:

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + \beta \cdot \nabla u + au = f. \quad (14)$$

В разработанной модели уравнение (14) представляется в упрощенном виде без лишних членов. Таким образом, уравнение (1) для температурной задачи можно переписать в следующем виде, где независимой переменной является температура:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-\lambda \nabla T) = L \rho_i (\theta_s - \theta_r) \times \times \frac{\partial B_l(T)}{\partial t} \cdot S_e + L \rho_i (\theta_s - \theta_r) \cdot B_l(T) \cdot \frac{\partial S_e}{\partial t}. \quad (15)$$

То есть $e_a, \alpha, \beta, \gamma$ и \bar{a} равны нулю. Соответственно, уравнение (2) для влажностной задачи можно переписать в следующем виде, где независимой переменной является эффективная степень насыщения водой S_e :

$$\left(1 + \frac{\rho_i}{\rho_w} \cdot B_l(T) \right) \frac{\partial S_e}{\partial t} + \nabla \cdot (-D(\theta) \nabla S_e - K_y(\theta)) + \frac{\rho_i}{\rho_w} \cdot S_e \cdot \frac{\partial B_l(T)}{\partial t} = 0. \quad (16)$$

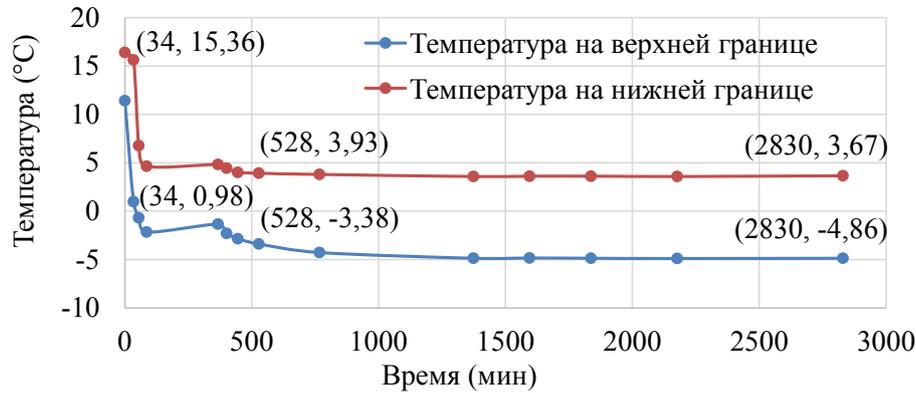


Рис. 1. Изменение температур на верхней и нижней границах по времени при проведении эксперимента

То есть e_a , α , β , f и компонент векторного коэффициента γ в горизонтальном направлении равны нулю.

Очевидно, коэффициенты системы зависят от переменной S_e , в этом случае система дифференциальных уравнений является нелинейной. Численная реализация нелинейной задачи осуществляется с помощью итерационных методов сквозного счета. Дифференциальные уравнения решаются с использованием модифицированного метода Ньютона с линейным поиском длины шага, дискретизация по времени — неявным методом Эйлера.

Верификация модели и анализ результатов

Верификация модели, предложенной в данной работе, проведена путем сравнения результатов расчета по модели без учета миграции влаги, результатов расчета на основе модели Ху Хэпина, а также опираясь на экспериментальные данные, представленные в работе [12].

Модель без учета миграции влаги широко описывается уравнением теплопроводности с учетом фазовых переходов поровой влаги. При решении задачи скрытая теплота фазовых переходов описывается частью функции теплоемкости грунта [19]. Модель Ху Хэпина является одномерной, в ней решение представлено методом конечных разностей при расчете в талой зоне по неявной схеме, а в мерзлой зоне по схеме Кранка — Николсон.

Соответственно, экспериментальные данные получены путем опыта одностороннего вертикального промерзания ненасыщенного грунта в закрытой системе, при промерзании в грунте происходит только перераспределение имеющейся влаги. В опыте используется цилиндрический образец суглинистого грунта с диаметром 11,36 см и высотой 13,68 см, начальная объемная влажность равна $0,2208 \text{ м}^3/\text{м}^3$. При проведении эксперимента температура на поверхностях изменяется по времени только на верхнем и нижнем основаниях (рис. 1), боковая поверхность теплоизолирована. Температура грунта измеряется датчиками, расположенными по разным высотам образца, распределение температуры грунта в начальный момент проведения испытания показано на рис. 2, а. Испытание продолжалось 2830 мин. [12].

В результате расчетов получены распределения температур и объемных влажностей в разное время. На рис. 2 показаны результаты распределения температур по высоте образца, полученных на основе разных моделей и на основе лабораторного наблюдения. Из полученных графиков (см. рис. 2) видно, характеристики распределения температур, вычисленного разными моделями, в основном согласуются с результатами измерений. Результаты расчета на основе разработанной модели лучше коррелируют с данными экспериментальных определений температуры грунта в

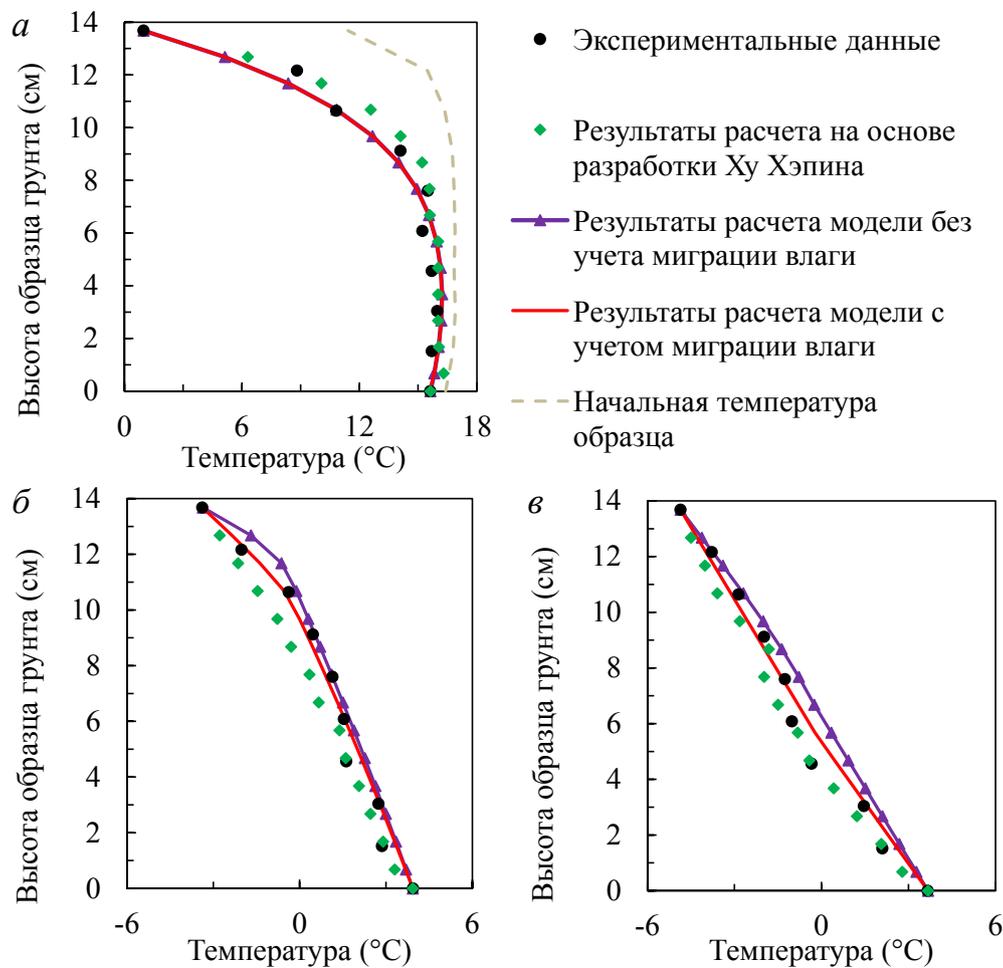


Рис. 2. Сравнение распределения температур по высоте образца, полученных на основе разных моделей и на основе лабораторного наблюдения в разные моменты времени:
a — 34 мин.; *б* — 528 мин.; *в* — 2830 мин.

отличие от других методов. Из рис. 2 видно, что промерзание грунта началось с верхней поверхности образца примерно с момента $t = 46$ мин. До промерзания грунта результаты расчета на основе разработки Ху Хэпина больше, чем экспериментальные данные (см. рис. 2, *a*), а после возникновения промерзания результаты меньше, чем данные экспериментальных определений (см. рис. 2, *б*, *в*). Это связано с уменьшением связности уравнений, вызванным использованием схемы Кранка — Николсона в мерзлой зоне [20].

Миграция влаги оказывает влияние на перераспределение температуры в мерзлой зоне, соот-

ветственно, при промерзании грунта результаты расчета температур по модели без учета миграции влаги больше, чем фактически измеренные.

На рис. 3 приведено сравнение распределения объемных влажностей по высоте образца, полученных на основе двух моделей и на основе лабораторного наблюдения через 47 часов. Очевидно, что численные результаты распределения влажности и экспериментальные данные хорошо согласуются между собой: по сравнению с равномерным распределением влажности в начале испытания, через 47 часов влажность в талой зоне уменьшается, а в мерзлой зоне увеличивается.

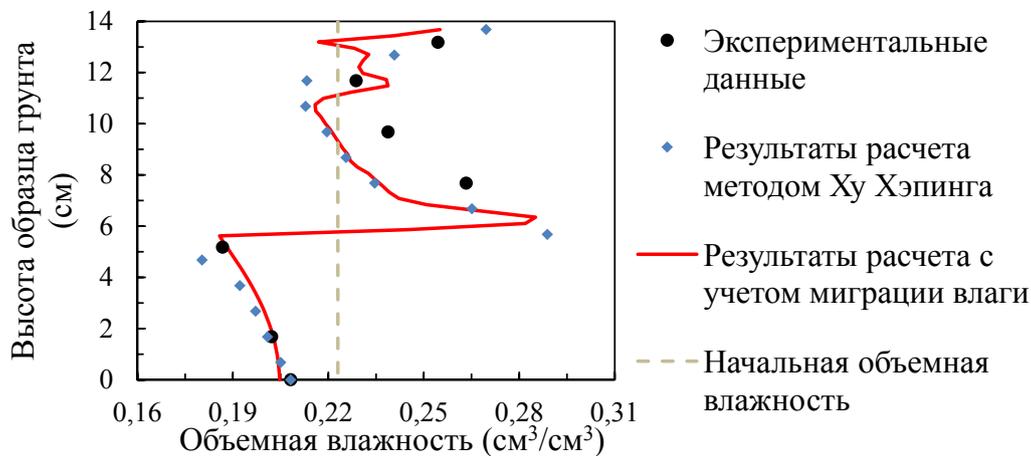


Рис. 3. Сравнение распределения объемных влажностей по высоте образца, полученных на основе разных моделей и на основе лабораторного наблюдения при $t = 47$ ч

ется, влага мигрирует из талой в мерзлую зону в процессе промерзания грунта. Скачок влажности существует вблизи фронта промерзания грунта.

Пример вычисления

В качестве практического приложения модели проведено численное моделирование теплового режима земляного полотна высокоскоростной магистрали Харбин — Далянь. Конструкция земляного полотна состоит из трех слоев грунта: щебенистый грунт, грунты крупнообломочные и песчаные и суглинок (см. рис. 4). Необходимые параметры грун-

тов и температурные условия взяты из работы [21] для участка Чанчунь, в том числе температура на поверхности задана с учетом амплитуды колебания температуры воздуха. Необходимые параметры грунтов приведены в табл. 1 и 2. Расчет выполнен на 5 лет с шагом 1 день.

Результаты расчета на пятый год представлены на рис. 5–7. Тепловая динамика грунтов земляного полотна иллюстрируется для разного времени года, при этом фазовый переход при промерзании и оттаивании грунта под основной площадкой земляного полотна происходит при температуре 0 °С.

ТАБЛИЦА 1. Теплофизические параметры грунтов для разных слоев

Слой грунта*	ρ_d (кг/м ³)	C_p (Дж/(м ³ · К))	λ_{th} (Вт/(м · К))	λ_f (Вт/(м · К))	T_{bf} (°С)
1	1780	750	1,86	2,53	-0,1
2	2060	860	1,15	1,40	-0,1
3	1600	800	1,54	2,4	-0,2

*1 — щебенистый грунт, 2 — грунты крупнообломочные и песчаные, 3 — суглинок.

ТАБЛИЦА 2. Гидрофизические параметры грунтов для разных слоев

Слой грунта*	θ_0	k_s (м/с)	a (1/м)	m	θ_s	θ_r
1	0,18	2×10^{-4}	0,66	0,14	0,40	0
2	0,16	1×10^{-4}	0,66	0,14	0,40	0
3	0,32	1×10^{-7}	2,65	0,26	0,51	0,08

* 1 — щебенистый грунт, 2 — грунты крупнообломочные и песчаные, 3 — суглинок.

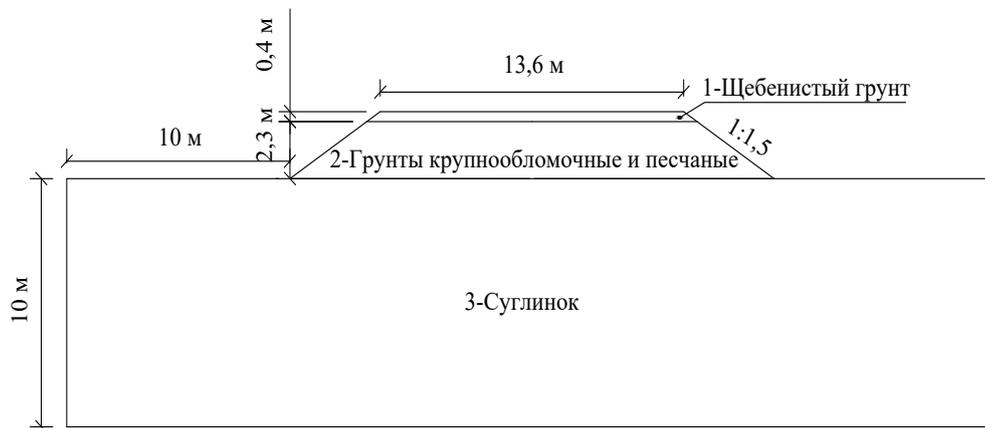


Рис. 4. Расчетная схема земляного полотна



Рис. 5. Распределение температуры по сезонам на пятый год

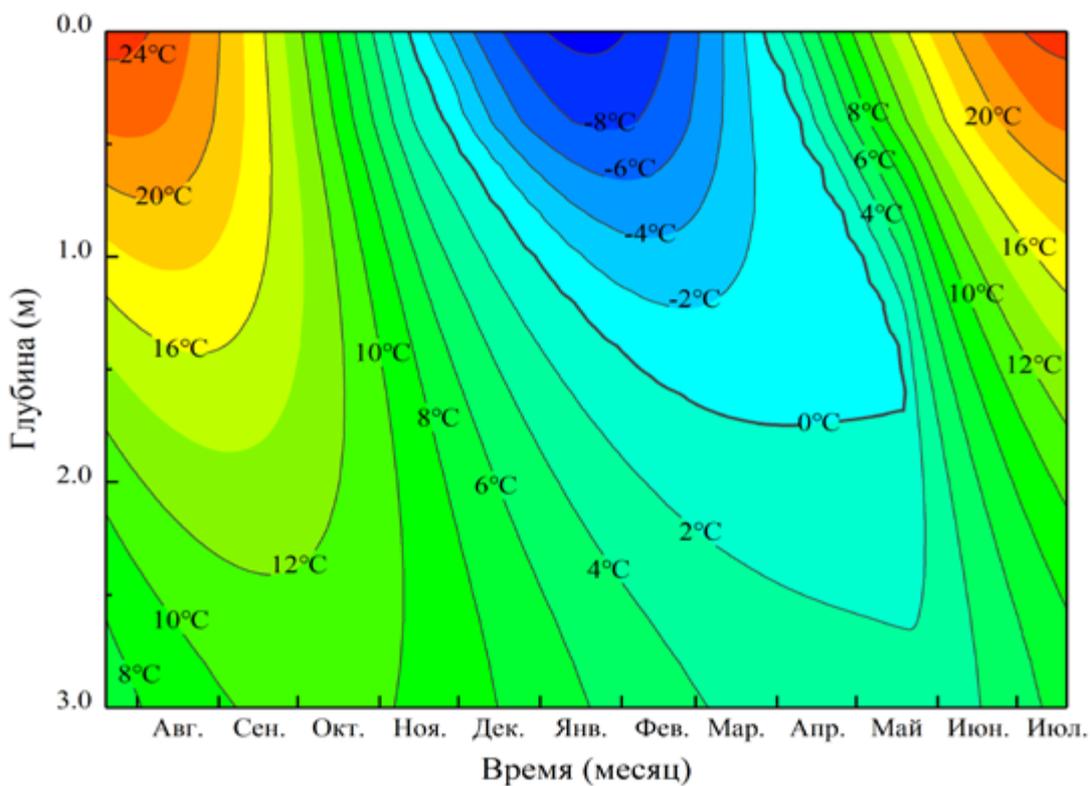


Рис. 6. Термоизоплет в центре земляного полотна под основной площадкой по результатам расчета на пятый год

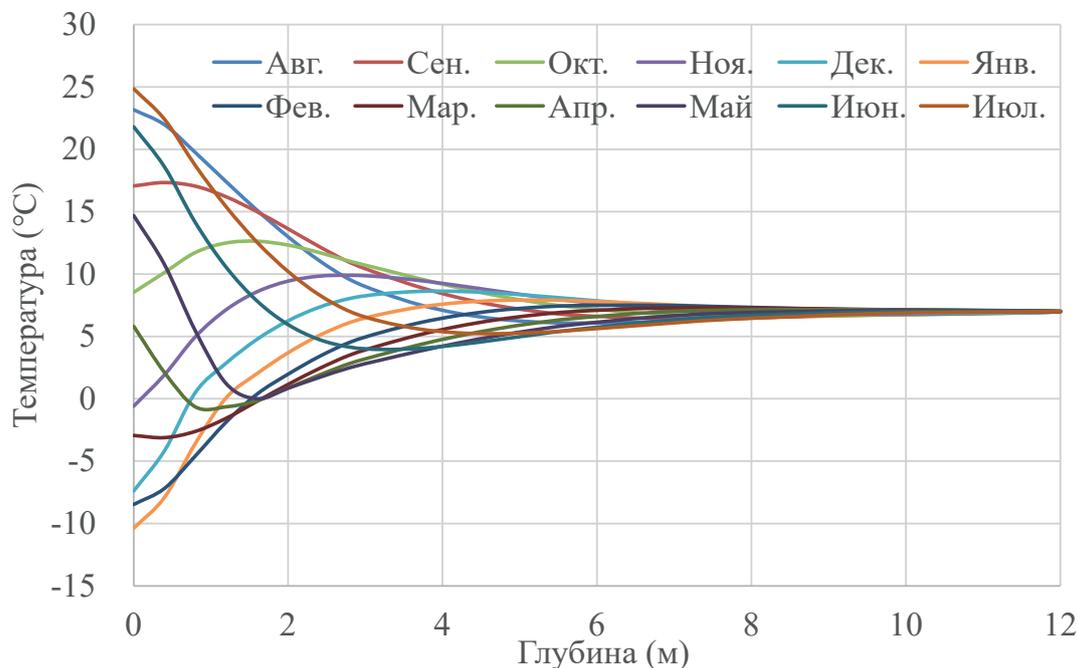


Рис. 7. Нестационарные периодические режимы температуры грунта для каждого месяца на пятый год

Из рис. 6 видно, что промерзание грунта начинается с последней декады ноября и достигает максимальной глубины в марте следующего года. В этом случае максимальная глубина промерзания под основной площадкой равна 1,8 м и совпадает с данными, вычисленными в работе [21] по методам на основе нормы GB 50007—2011. Оттаивание грунта начинается в конце марта следующего года, в основном этот процесс происходит по направлению сверху вниз от поверхности земли, в то же время максимальная глубина промерзания уменьшается, скорость оттаивания грунта вниз от поверхности больше, чем скорость оттаивания вверх от годовой максимальной глубины промерзания. Мерзлый грунт в земляном полотне исчезает в последней декаде мая следующего года.

Из рис. 7 видно, что амплитуда колебания температуры в течение года стабилизируется с увеличением глубины грунта: у поверхности температура меняется в диапазоне от $-10,4$ до $24,8$ °C, на глубине 2 м — в диапазоне от $0,9$ до $13,6$ °C, на глубине 6 м — в диапазоне от $5,8$ до $7,9$ °C, глубина

нулевых амплитуд соответствует 12 метрам, температура грунта становится равной $7,0$ °C.

Разработанная математическая модель дает возможность прогнозировать глубину промерзания грунта с учетом миграции влаги, в том числе изменение глубины промерзания и оттаивания, вызванных потеплением климата. Разработанная модель может быть использована как для изучения закономерности распределения теплового режима земляного полотна при промерзании и оттаивании, так и для совершенствования конструкции земляного полотна, чтобы защищать его от морозного пучения грунтов.

Заключение

1. В данной работе построена совмещенная математическая модель для описания теплового режима с учетом миграции влаги. Достоверность разработанной модели подтверждается хорошей сходимостью расчетных значений и экспериментальных наблюдений. 2. Приведенный пример показывает, что предложенную модель можно

применять для моделирования теплового режима земляного полотна в условиях холодного климата, чтобы изучать закономерности распределения температуры в земляном полотне. Это закладывает основу для исследования способов ликвидации дефектов земляного полотна от морозного пучения.

Библиографический список

1. Лыков А. В. Теория тепло-и массопереноса / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. — М.; Ленинград: Госэнергоиздат, 1963. — 535 с.
2. Иванов Н. С. Тепло- и массоперенос в мерзлых горных породах / Н. С. Иванов. — М.: Наука, 1969. — 240 с.
3. Павлов А. Р. Алгоритм раздельного определения влажностного поля в талой и мерзлой зонах в задаче тепломассопереноса / А. Р. Павлов, М. В. Матвеева // Математические заметки СВФУ. — 2010. — № 17(1). — С. 83–92.
4. Павлов А. Р. Итерационная разностная схема для задачи тепломассопереноса с фазовыми переходами в пористой среде / А. Р. Павлов, И. Г. Ларионова, М. В. Михайлова // Математические заметки СВФУ. — 2006. — № 13(2). — С. 68–78.
5. Павлов А. Р. Итерационная разностная схема для задачи тепломассопереноса при промерзании грунтов / А. Р. Павлов, М. В. Матвеева // Вестник Самарского государственного университета. — 2007. — № 6. — С. 242–253.
6. Harlan R. L. Analysis of coupled heat-fluid transport in partially frozen soil / R. L. Harlan // Water Resources Research. — 1973. — № 9(5). — Pp. 1314–1323.
7. Sheppard M. I. Development and Testing of a Computer Model for Heat and Mass Flow in Freezing Soils / M. I. Sheppard, B. D. Kay, J. P. G. Loch // Proceedings of the third International Conference on Permafrost (July 10–13, 1978, Edmonton, Alberta, Canada). — Ottawa: National Research Council of Canada, 1978. — Pp. 76–81.
8. Jansson P-E. Model for Annual Water and Energy Flow in a Layered Soil / P-E. Jansson, S. Halldin // Developments in Agricultural and Managed Forest Ecology. — 1979. — Iss. 9. — Pp. 145–163.
9. Taylor G. S. A model for coupled heat and moisture transfer during soil freezing / G. S. Taylor, J. N. Luthin // Canadian Geotechnical Journal. — 1978. — Iss. 15(4). — Pp. 548–555.
10. Jame Y.-W. Heat and mass transfer in a freezing unsaturated porous medium / Y.-W. Jame, D. I. Norum // Water Resources Research. — 1980. — Iss. 16(4). — Pp. 811–819.
11. Fukuda M. Numerical analysis of heat-moisture flow during soil freezing / M. Fukuda, S. Nakagawa // Journal of the Japanese Society of Snow and Ice. — 1982. — Vol. 44. — Iss. 1. — Pp. 13–21.
12. Hu H. A numerical simulation for heat and moisture transfer during soil freezing / H. Hu, Sh. Yang, Zh. Lei // Journal of Hydraulic Engineering. — 1992. — Iss. 07. — Pp. 1–8.
13. Bai Q.-B. Equations and numerical simulation for coupled water and heat transfer in frozen soil / Q.-B. Bai, Li Xu, Y. Tian et al. // Chinese Journal of Geotechnical Engineering. — 2015. — Iss. 37(S2). — Pp. 131–136.
14. Richards L. A. Capillary Conduction of Liquids Through Porous Mediums / L. A. Richards // Physics. — 1931. — Iss. 1(5). — Pp. 318–333.
15. СП 25.13330.2020 «СНиП 2.02.04—88. Основания и фундаменты на вечномёрзлых грунтах». — Утв. Приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства РФ от 30 декабря 2020 г. № 915/пр. — М.: ФАУ «ФЦС», 2020. — 135 с.
16. Van Genuchten M. Th. A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils / M. Th. van Genuchten // Soil Science Society of America Journal. — 1980. — Iss. 44(5). — Pp. 892–898.
17. Mualem Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media / Y. Mualem // Water Resources Research. — 1976. — Iss. 12 (3). — Pp. 513–522.
18. Егоров В. И. Применение ЭВМ для решения задач теплопроводности: учебное пособие / В. И. Егоров. — СПб.: СПб ГУ ИТМО, 2006. — 77 с.
19. Кудрявцев С. А. Промерзание и оттаивание грунтов (практические примеры и конечноэлементные расчёты) / С. А. Кудрявцев, И. И. Сахаров, В. Н. Парамонов. — СПб.: Геореконструкция, 2014. — 247 с.
20. Shang X.-Y. Numerical Simulation Improvement of Frozen Soil's Frost Heave with Hydraulics Model / X.-Y. Shang, Guo-qing Zhou, J.-S. Zhou // Journal of China University of Mining & Technology. — 2006. — Iss. 35(6). — Pp. 762–766.

21. Wang X. Optimization Study for Subgrade Structure of HSR in Deep Seasonally Frozen Region Based on Temperature Field: Master's Thesis / X. Wang. — Beijing: Beijing Jiaotong University, 2019. — 101 p.

Дата поступления: 07.11.2022

Решение о публикации: 29.11.2022

Контактная информация:

ВАН Синьтун — аспирант; wangxintong@mail.ru

КОЛОС Алексей Федорович — канд. техн. наук, доц.; kolos2004@inbox.ru

ПЕТРЯЕВ Андрей Владимирович — канд. техн. наук, ст. науч. сотр.; pgups60@mail.ru

Mathematical Modeling of the Process of Soil Freezing of Railway Subgrade in Cold Climate Conditions

X. Wang, A. F. Kolos, A. V. Petriaev

Emperor Alexander I Petersburg State Transport University, 9, Moskovsky pr., Saint Petersburg, 190031, Russian Federation

For citation: Wang X., Kolos A. F., Petriaev A. V. Mathematical Modeling of the Process of Soil Freezing of Railway Subgrade in Cold Climate Conditions // *Proceedings of Petersburg Transport University*, 2022, vol. 19, iss. 4, pp. 820–831. (In Russian). DOI: 10.20295/1815-588X-2022-4-820-831

Summary

Purpose: Mathematical model for studying the process of soil freezing given moisture migration is developed. Numerical modeling of temperature mode of railway subgrade at non-stationary process in cold climate conditions is performed. **Methods:** Numerical implementation of the model is performed by mathematical module processing in COMSOL Multiphysics program, which's based on partial differential equations (PDE), with finite element method. The model reliability is confirmed by the comparison with previous experimental data and the results of simulation by other authors. **Results:** Calculation results on the developed model basis show the best correlation with experimental data in comparison with the results for other models. Calculation example and calculation results for subgrade temperature mode in freezing-thawing fifth cycle are presented. The analysis of soil freezing depth change and soil temperature fluctuation change by depth by fifth year are carried out. **Practical significance:** The developed mathematical model makes it possible to predict soil freezing depth, taking into account moisture migration, including freezing and thawing depth changes caused by climate warming. The developed model can be used both, to study the mechanism of subgrade temperature mode distribution at freezing and thawing, and to improve subgrade construction for to protect it from soil frost heaving.

Keywords: Soil freezing, temperature mode, moisture migration, numerical modelling, railway subgrade.

References

1. Lykov A. V. *Teoriya teplo-i massoperenosa* [Theory of heat and mass transfer]. Moscow; Leningrad: Gosenergoizdat Publ., 1963, 535 p. (In Russian)

2. Ivanov N. S. *Teplo i massoperenos v merzlyh gornyh porodah* [Heat and mass transfer in frozen soil]. Moscow: Nauka Publ., 1969, 240 p. (In Russian)

3. Pavlov A. R., Matveeva M. V. Algoritm razdel'nogo opredeleniya vlazhnostnogo polya v taloj i merzloj zonah v zadache teplomassoperenosa [Algorithm for separate deter-

mination of the humidity field in the thawed and frozen zones in the problem of heat and mass transfer]. *Matematicheskie zametki SVFU* [Mathematical notes of NEFU]. Yakutsk: North-Eastern Federal University Publ., 2010. vol. 17, I. 1, pp 83–92. (In Russian)

4. Pavlov A. R., Larionova I. G., Mihajlova M. V. Iteracionnaya raznostnaya skhema dlya zadachi teplomassoperenosa s fazovymi perekhodami v poristoj srede [Iterative difference scheme for the problem of heat and mass transfer with phase transitions in a porous medium].

Matematicheskie zametki SVFU [Mathematical notes of NEFU]. Yakutsk: North-Eastern Federal University Publ., 2006, vol. 13, I. 2, pp. 68–78. (In Russian)

5. Pavlov A. R., Matveeva M. V. Iteracionnaya raznostnaya skhema dlya zadachi teplomassope-renosa pri promerzanii gruntov [Iterative finite-difference scheme for the problem of heat and mass transfer in freezing frounds]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University]. Samara: Samara State University Publ., 2007, I. 6(56), pp. 242–253. (In Russian)

6. Harlan R. L. Analysis of coupled heat-fluid transport in partially frozen soil. *Water Resources Research*. 1973, I. 9(5), pp. 1314–1323.

7. Sheppard M. I., Kay B. D., Loch J. P. G. Development and Testing of a Computer Model for Heat and Mass Flow in Freezing Soils. Proceedings of the third International Conference on Permafrost (July 10–13, 1978, Edmonton, Alberta, Canada). Ottawa: National Research Council of Canada, 1978, pp. 76–81.

8. Jansson P-E., Halldin S. Model for Annual Water and Energy Flow in a Layered Soil. *Developments in Agricultural and Managed Forest Ecology*. 1979, I. 9, pp. 145–163.

9. Taylor G. S., Luthin J. N. A model for coupled heat and moisture transfer during soil freezing. *Canadian Geotechnical Journal*. 1978, I. 15(4), pp. 548–555.

10. Jame Y.-W., Norum D. I. Heat and mass transfer in a freezing unsaturated porous medium. *Water Resources Research*. 1980, I. 16(4), pp. 811–819.

11. Fukuda M., Nakagawa S. Numerical analysis of heat-moisture flow during soil freezing. *Journal of the Japanese Society of Snow and Ice*. 1982, vol. 44, I. 1, pp. 13–21.

12. Hu H., Yang Sh., Lei Zh. A numerical simulation for heat and moisture transfer during soil freezing. *Journal of Hydraulic Engineering*. 1992, I. 07, pp. 1–8.

13. Bai Q.-B., Xu LI, Tian Y. Equations and numerical simulation for coupled water and heat transfer in frozen soil. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*. 2015, I. 37(S2), pp. 131–136.

14. Richards L. A. Capillary Conduction of Liquids Through Porous Mediums. *Physics*. 1931, I. 1(5), pp. 318–333.

15. SP 25.13330.2020 “SNIIP 2.02.04—88. Osnovaniya i fundamenty na vechnomerzlykh gruntakh”. *Utv. Prikazom*

Ministerstva stroitel'stva i zhilishchno-kommunal'nogo khozyaystva RF ot 30 dekabrya 2020 g. № 915/pr [SP 25.13330.2020 “SNIIP 2.02.04—88. Bases and foundations on permafrost soils”. Approved. Order of the Ministry of Construction, Housing and Communal Services of the Russian Federation dated December 30, 2020 № 915/pr]. Moscow: FAU “FTsS” Publ., 2020. 135 p. (In Russian)

16. Van Genuchten M. Th. A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. *Soil Science Society of America Journal*. 1980, I. 44(5), pp. 892–898.

17. Mualem Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resources Research*. 1976, I. 12 (3), pp. 513–522.

18. Egorov V. I. *Primenenie EVM dlya resheniya zadach teploprovodnosti: uchebnoe posobie* [Application of computers for solving heat conduction problems. Textbook]. St. Petersburg: ITMO University Publ., 2006, 77 p. (In Russian)

19. Kudryavtsev S. A., Sakharov I. I., Paramonov V. N. *Promerzanie i ottaivanie gruntov (prakticheskie primery i konechnoelementnye raschety)* [Freezing and thawing of soils (practical examples and finite element calculations)]. St. Petersburg: Georeconstruction Group of Companies Publ, 2014. 247 p. (In Russian)

20. Shang X.-Y., Zhou Guo-qing, Zhou J.-S. Numerical Simulation Improvement of Frozen Soil's Frost Heave with Hydraulics Model. *Journal of China University of Mining & Technology*. 2006, I. 35(6), pp. 762–766.

21. Wang X. Optimization Study for Subgrade Structure of HSR in Deep Seasonally Frozen Region Based on Temperature Field: Master's Thesis. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2019, 101 p.

Received: November 07, 2022

Accepted: November 29, 2022

Author's information:

Xintong WANG — Postgraduate Student;

wangxintong@mail.ru

Aleksey F. KOLOS — PhD in Engineering, Associate Professor; kolos2004@inbox.ru

Andrey V. PETRYAEV — PhD in Engineering, Senior Researcher; pgups60@mail.ru