

# СИНТЕЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ИДЕАЛЬНЫМИ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

**ЕГОРОВ Владимир Викторович** — д-р техн. наук, профессор базовой кафедры<sup>1</sup>;  
e-mail: egorovrimr@mail.ru

**ЛОБОВ Сергей Александрович** — д-р техн. наук, технический консультант<sup>2</sup>,  
профессор базовой кафедры<sup>1</sup>; e-mail: lsa\_rimr@mail.ru

**ХОДАКОВСКИЙ Валентин Аветикович** — д-р техн. наук, профессор, профессор<sup>3</sup>;  
e-mail: hva1104@mail.ru

<sup>1</sup> Государственный университет аэрокосмического приборостроения, базовая кафедра «Радиостроение и средства связи для телемедицины и МЧС», Санкт-Петербург

<sup>2</sup> АО «Проектно-конструкторское бюро «РИО», Санкт-Петербург

<sup>3</sup> Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, кафедра «Информатика и информационная безопасность», Санкт-Петербург

Разработан метод синтеза последовательностей, обладающих идеальными автокорреляционными функциями. Приведен обзор существующих подходов, аналитический вывод требований к идеальным последовательностям, моделирование и синтез периодических последовательностей с учетом необходимости обеспечения низкого пик-фактора последовательности и низкого уровня боковых лепестков автокорреляционной функции. На основе предложенного метода создана математическая модель и ее программная реализация, позволяющие генерировать периодические последовательности и оценивать их свойства. В результате проведенных вычислительных экспериментов получены последовательности с количеством символов от 6 до 4096. Выявлено, что при любой длине последовательности можно сформировать такую, которая имеет идеальную периодическую автокорреляционную функцию при пик-факторе равном или близком к 1. Поскольку предлагаемые последовательности обладают идеальными АКФ они могут быть рекомендованы для использования в системах железнодорожной автоматики и связи для высоконадежного управления движением поездов в высокоскоростных магистралях, а также в системах связи, в качестве сигналов в навигационных и локационных системах, в качестве сигналов, применяемых в ультразвуковой дефектоскопии и т.д.

**Ключевые слова:** Случайные последовательности; ЛЧМ-сигналы; спектральные числа; преобразование Фурье; автокорреляционная функция; боковые пики АКФ; циркулянты; пик-фактор последовательности.

**DOI:** 10.20295/2412-9186-2022-8-01-78-89

## Введение

Проблема повышения электромагнитной совместимости и помехоустойчивости средств связи стоит чрезвычайно остро особенно в интенсивно используемых диапазонах волн и в том числе на железнодорожном транспорте, где используются диапазоны от тональных частот в рельсовых цепях, до светового диапазона, используемого в волоконных системах передачи данных [1–3]. Все современные системы передачи данных и средства обработки данных используют цифровые методы синтеза и анализа информационных потоков и преобразования их в сигналы, которые могут быть переданы по каналам связи.

В то же время методы преобразования информационного потока в сигнал используют традиционные методы модуляции синусоидальной несущей. С другой стороны, давно замечено, что для повышения помехоустойчивости канала передачи информации необходимо расширять полосу частот, занимаемой используемым сигналом, и полосу частот самого канала.

В тональных рельсовых цепях для обнаружения момента блокировки рельсовой цепи используется амплитудная манипуляция несущей частоты меандром частотой 8 или 12 Гц. Теоретически помехоустойчивость сигнала с амплитудной модуляцией обеспечивается лишь

в том случае, когда отношение сигнал/шум на входе приемника составляет 12 дБ и более. А в реальных тональных рельсовых цепях на частоте 580 Гц при амплитуде тока сигнала 5 А, амплитуда тока 11 гармоника тяговой сети 50 Гц может составлять 10 А, при этом отношение сигнал/шум составляет минус 6 дБ по мощности.

Здесь следует отметить, что даже фазовая модуляция, являющаяся наиболее помехоустойчивой, не позволит обеспечить надежную работу тональной рельсовой цепи в условиях таких сильных помех, поскольку ее пороговая помехоустойчивость составляет 5 дБ по мощности.

В работе [3, с. 161] один из известных специалистов в области железнодорожной автоматики профессор В. И. Шаманов прямо указывает: «Обеспечить решение рассматриваемой задачи можно за счет применения более помехоустойчивых сигналов или совершенствования применяемых способов кодирования». Авторы данной статьи полностью согласны с автором с небольшой поправкой — нужно в приведенной мысли вместо логической связки «или» поставить связку «и», поскольку требуется внести изменения и в сигналы, и в методы их модуляции (в данном случае), и в методы синтеза, и в методы кодирования, и в методы обработки таких структур.

В статье рассмотрена часть этой проблемы, связанная с поиском широкополосных сигналов, обладающих идеальными автокорреляционными свойствами, методами их цифрового синтеза и цифровой обработки.

Основной целью данной работы является поиск вариантов синтеза сигналов с идеальными автокорреляционными свойствами и выработка методов их применения в системах железнодорожной автоматики и телемеханики.

Для достижения поставленной цели авторы на основе существующих сигналов с хорошими автокорреляционными свойствами выявили закономерности, учет которых позволяет

синтезировать сигналы с идеальными автокорреляционными свойствами, и разработали методы синтеза таких сигналов и их обработки при приеме.

## 1. Существующее состояние в использовании сигналов с хорошими автокорреляционными свойствами

### 1.1. Коды Баркера

Данные последовательности представляют собой двоичные последовательности с чередованием символов «1» и «-1». Известные последовательности Баркера с числом символов от 5 до 13 приведены в табл. 1. На рис. 1–3 приведены графики наиболее часто применяемых последовательностей и их автокорреляционных функций (АКФ).

Отличительными особенностями кодов Баркера, связанными с их энергетическими характеристиками, являются:

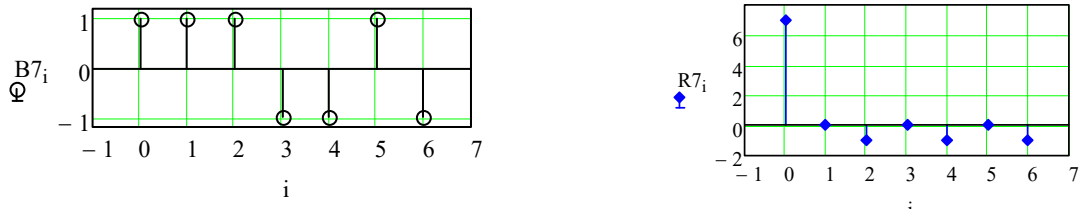
- их пик-фактор равен единице, что хорошо сказывается на полном использовании энергии сигнала при передаче;
- амплитуда пика автокорреляционной функции последовательности равна длине последовательности, а боковые пики не превышают единицы.

Интересной особенностью данных последовательностей является также то, что их спектральные числа располагаются на единичной окружности, то есть энергия последовательностей распределена равномерно.

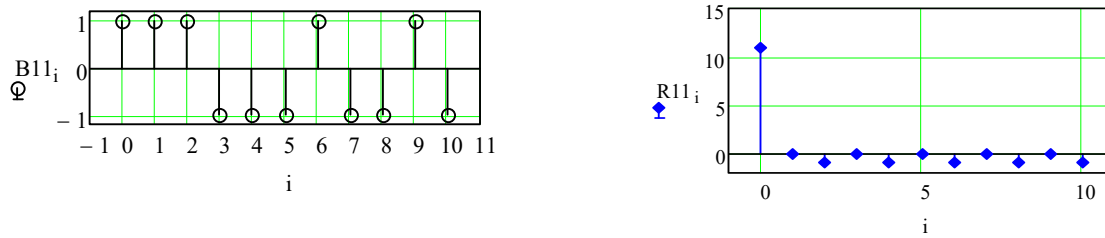
На рис. 4 видно, что спектральные числа (комплексные коэффициенты преобразования Фурье) в основном лежат на единичной окружности, что свидетельствует о равномерности спектра последовательностей, однако в последовательности длиной  $N = 11$  один из коэффициентов не содержит мнимой компоненты и его модуль меньше единицы.

Таблица 1. Последовательности Баркера с числом символов от 5 до 13

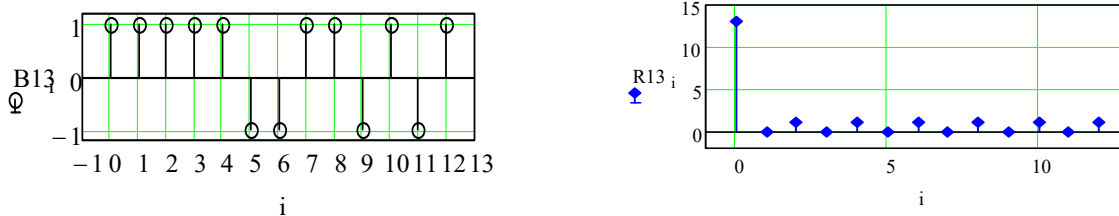
Длина	Последовательность	АКФ
5	1, 1, 1, -1, 1	5, 0, 1, 0, 1,
7	1, 1, 1, -1, -1, 1, -1	7, 0, -1, 0, -1, 0, -1, -1, 0, -1
11	1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1	11, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1
13	1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1	13, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1



**Рис. 1.** Последовательность Баркера  $N = 7$  и ее АКФ



**Рис. 2.** Последовательность Баркера  $N = 11$  и ее АКФ



**Рис. 3.** Последовательность Баркера  $N = 13$  и ее АКФ

Авторы данной статьи предположили, что если подправить модули всех коэффициентов Фурье так, чтобы все они лежали на единичной окружности, то можно будет получить улучшенные корреляционные свойства последовательностей. Алгоритм подобного преобразования предполагает нахождение вектора аргументов комплексных коэффициентов преобразования Фурье последовательности Баркера, синтез скорректированного спектра путем расположения всех коэффициентов Фурье преобразования на единичной окружности с последующим выполнением обратного преобразования Фурье этого спектра. В среде Mathcad этот алгоритм можно выполнить одной функцией:

$$P(U) := \text{iffi}\{ \exp [j \cdot \arg (\text{fft}(U))] \}, \quad (1)$$

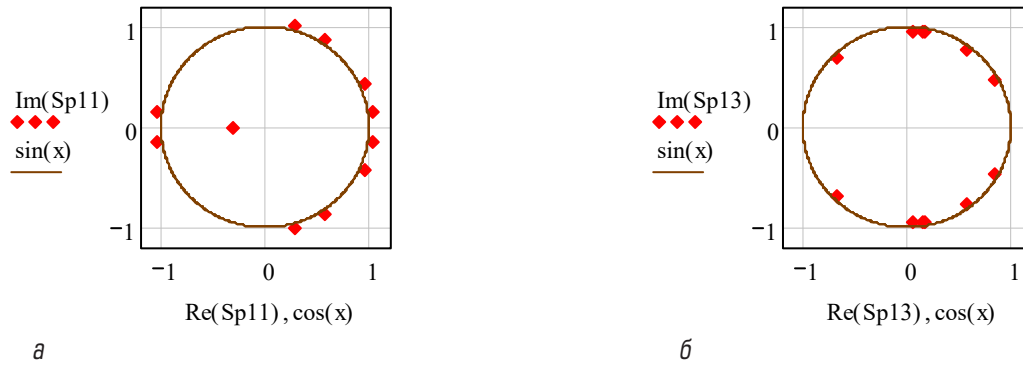
где  $U$  — корректируемая последовательность;  $\text{fft}(x)$  — функция вычисления быстрого комплексного преобразования Фурье;

$\text{iffi}(x)$  — функция вычисления быстрого комплексного обратного преобразования Фурье;  $j$  — мнимая единица.

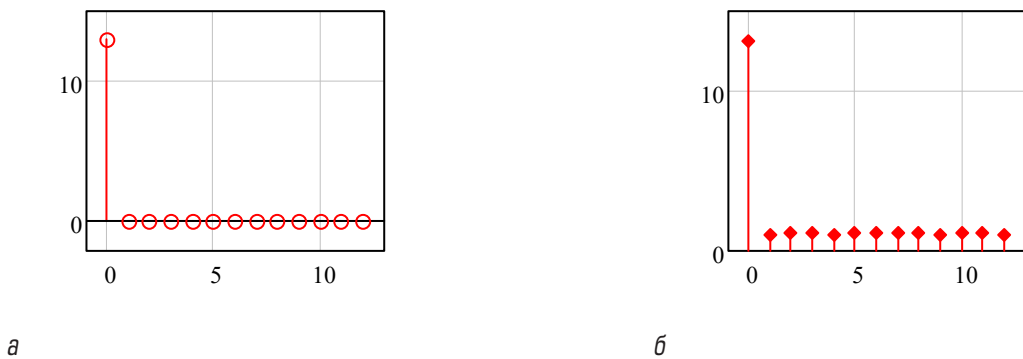
После такой операции амплитудный спектр последовательности становится строго равномерным, а фазовый спектр сохраняется.

Для вычисления АКФ сигнала (1) необходимо выполнить комплексную свертку во временной или частотной области. С точки зрения скорости вычислений предпочтительнее делать свертку в частотной области с использованием быстрого преобразования Фурье. Алгоритм такой свертки предполагает поточечное перемножение вектора комплексного спектра последовательности и ему сопряженного с последующим выполнением обратного комплексного преобразования Фурье. В среде Mathcad такое преобразование можно выполнить так:

$$\text{Korr}(U) := \text{iffi}\left\{ \overline{\text{fft}(U)} \cdot \widehat{\text{fft}(U)} \right\} \cdot \sqrt{N}, \quad (2)$$



**Рис. 4.** Коэффициенты преобразования Фурье последовательностей Баркера:  
*а* — длиной 11 символов; *б* — 13 символов



**Рис. 5.** АКФ последовательности Баркера  $N = 13$ , вычисленные по формуле (2) после корректуры спектра по формуле (10) (*а*), и без корректуры (*б*)

где  $U$  — последовательность;  
 $\odot$  — знак поэлементного перемножения векторов;  
 $\overline{(x)}$  — знак комплексного сопряжения вектора  $x$ ;  
 $N$  — длина последовательности.

На рис. 5 приведены графики обычной корреляционной функции, вычисленной как свертка последовательности и вычисленная по формуле (2).

Из рис. 5 видно, что коррекция спектра последовательности Баркера позволяет существенно улучшить корреляционные свойства, поскольку боковые всплески АКФ полностью подавляются.

Единственным недостатком кодов Баркера является то, что их длина ограничена числом 13. К настоящему времени уже строго доказано, что более длинных последовательностей не существует, хотя их поиску было уделено немало сил многих исследователей. Но здесь находят достойное место двоичные последовательности максимальной длины.

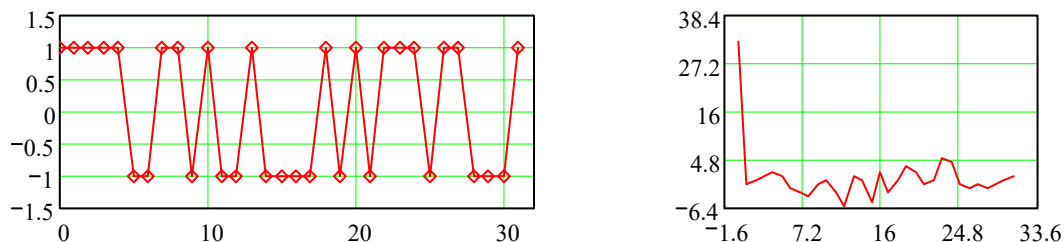
### 1.2. Двоичные псевдослучайные последовательности

Регистром сдвига с обратными связями на основе сумматоров по модулю 2 достаточно просто генерируются  $m$ -последовательности. На рис. 6 приведена программа в среде Mathcad, которая позволяет генерировать псевдослучайные последовательности (ПСП) не только двоичные, но и многоуровневые.

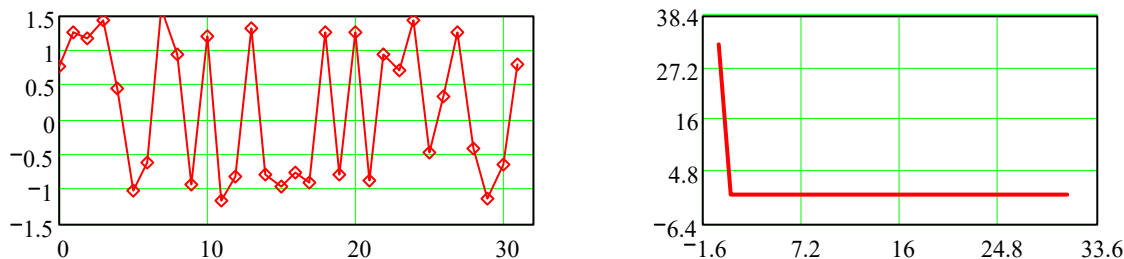
Приведенная программа имеет три входных параметра:  $n$  — число регистров сдвига, задействованных в генераторе, при этом полная длина сгенерированной последовательности равна  $N = 2^n$ ;  $k$  — номер регистра, выход которого совместно с выходом последнего регистра связан со входом сумматора, где происходит их суммирование по выбранному модулю и результат подается на вход первого регистра сдвига;  $md$  — коэффициент, определяющий, по какому модулю будут суммироваться числа, передаваемые в регистрах сдвига, при этом получаемая последовательность будет иметь  $md$  амплитудных уровней.

$$\text{mPos}(n, k, md) := \left\{ \begin{array}{l} T \leftarrow \text{matrix}(n, 1, f(x, y) \leftarrow \text{ceil}(md \cdot 2^{-1})) \\ \text{for } i \in 0..2^n - 1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} W_i \leftarrow T_{n-1} \\ T \leftarrow \text{stack}(\text{mod}(T_{n-1-k} + T_{n-1}, md), T) \end{array} \right. \\ W \leftarrow 2W - md + 1 \\ W \cdot \max(W)^{-1} \end{array} \right.$$

**Рис. 6.** Программа в Mathcad для генерации ПСП



**Рис. 7.** Двоичная псевдослучайная последовательность с параметрами  $n = 5, k = 3, md = 2$ , — слева, и ее АКФ — справа



**Рис. 8.** Двоичная псевдослучайная последовательность (при  $n = 5, k = 3, md = 2$ ), после коррекции спектра — слева, и ее АКФ — справа

Последовательность, формируемая генератором (см. рис. 6), обрабатывалась путем преобразования (1), и результаты представлены на рис. 8.

Сравнивая рис. 7, 8, можно заключить, что нормализация спектра последовательности не сильно изменила характер последовательности (пик-фактор возрос лишь до 1,2), но боковые пики АКФ (правый график рис. 8) устранены полностью, т. е. вся энергия последовательности сосредоточена в центральном пике АКФ.

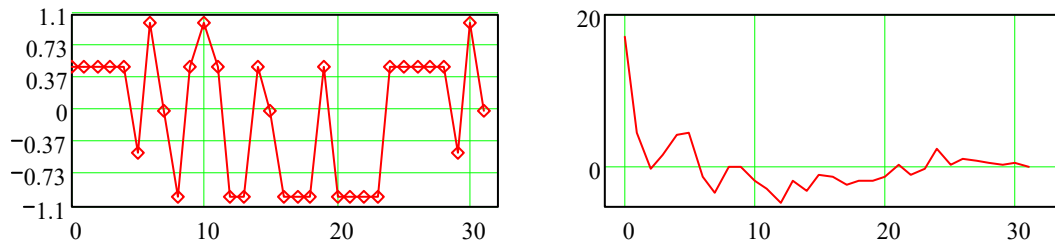
### 1.3. Многоуровневые псевдослучайные последовательности (МПСП)

Рассмотрим результат работы программы (см. рис. 6) для генерации пятиуровневой по-

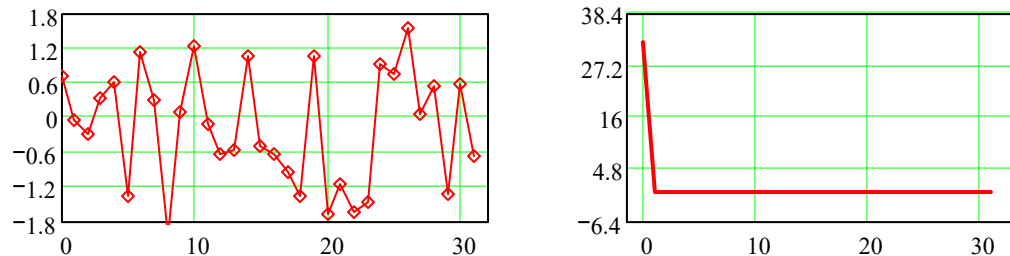
следовательности: присвоим входным параметрам следующие значения:  $n = 5, k = 5, md = 5$ . На рис. 9 приведены полученная последовательность и ее АКФ.

Сравнение двоичной последовательности при  $n = 5$  и пятиуровневой такой же длины показывает, что двоичная имеет лучшую АКФ. Сделаем аналогичное сравнение, проведя корректировку спектра пятиуровневой последовательности. На рис. 10 приведены результаты, полученные после коррекции спектра последовательности.

Сравнение полученных результатов позволяет заключить, что после коррекции параметры АКФ двоичной и пятиуровневой последовательностей практически совпадают, хотя



**Рис. 9.** Пятиуровневая последовательность и ее АКФ



**Рис. 10.** Пятиуровневая последовательность и ее АКФ после коррекции спектра

сами последовательности разные. Таким образом, можно получить большое количество различных последовательностей с идеальными АКФ, что позволяет передавать большой объем информации.

**1.4. Сигналы с линейной частотной модуляцией**

Сигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) представляют собой синусоидальное колебание, частота которого линейно изменяется в некотором диапазоне. Линейный закон изменения частоты можно записать так:

$$f(t) = fn + (fv - fn) \cdot t, \tag{3}$$

тогда синусоидальное колебание с линейным законом изменения частоты примет вид:

$$S(t) = \sin\{2 \cdot \pi \cdot [fn + (fv - fn) \cdot t] \cdot t\}. \tag{4}$$

Для получения функция моделирования ЛЧМ-последовательности заданной длины необходимо из непрерывной функции (4) выбрать с заданной частотой дискретизации отсчеты этой функции, что и выполнено в программе Mathcad, приведенной на рис. 11.

Если сравнить двоичную, пятиуровневую и ЛЧМ последовательности, имеющие одинаковую

длину  $N = 32$ , то видно, что ЛЧМ сигнал изначально (рис. 12) имеет лучшие корреляционные свойства, а после коррекции спектра боковые всплески в ЛЧМ-последовательности также пропадают (рис. 13).

Подводя итог по обзору известных последовательностей, можно заключить следующее:

- а) наилучшими автокорреляционными свойствами обладают коды Баркера, но их длина не превышает 13;
- б) из  $m$ -последовательностей наилучшими характеристиками обладают двоичные ПСП, по сравнению с многоуровневыми ПСП;
- в) ЛЧМ-последовательности, по сравнению с двоичными ПСП, имеют лучшие автокорреляционные свойства и также могут быть получены любой длины;
- г) коррекция спектра всех рассмотренных последовательностей позволяет существенно улучшать их автокорреляционные функции при некотором ухудшении пик-фактора исходной последовательности.

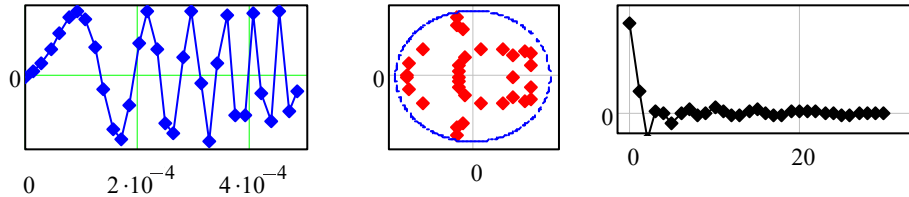
**2. Сигналы с квадратичным законом изменения фазы**

Авторы уже в течение длительного времени занимаются проблемами повышения скорости и надежности средств связи [4–11]. В частности,

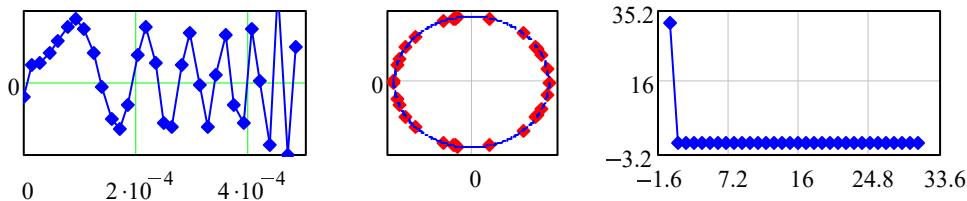
```

So(x) := Re(x) - i·Im(x)   Korr(X) := icfft( (cfft(X)·So(cfft(X))) ) / sqrt(rows(X))   R(X)   correl(X, X)
Opt(X) := icfft(exp(i·arg(cfft(X))))   fn := 300   fv := 3400   Fd := 64000   N := 32   kf := 8000
i := 0..N - 1   T := N·Fd-1   T = 0.001   Vi := sin[ 2·π·[ fn + (fv - fn)· $\frac{i·kf}{Fd}$  ]· $\frac{i}{Fd}$  ]   Vm := Opt(V)
Sp := cfft(V)   Spm := cfft(Vm)
    
```

**Рис. 11.** Программа в среде Mathcad для моделирования ЛЧМ-последовательности



**Рис. 12.** ЛЧМ-последовательность N=32, ее фазовый спектр и АКФ до коррекции спектра



**Рис. 13.** ЛЧМ-последовательность N=32, ее фазовый спектр и АКФ после коррекции спектра

в работе [4] показано, что для получения последовательности  $P$  с идеальной периодической автокорреляционной функцией (ПАКФ) необходимо, чтобы ее спектральные числа располагались на единичной окружности и построенная на ее основе циркулянтная матрица обладала следующим свойством:

$$Cir \cdot Cir^T = I. \tag{5}$$

Используем метод факторизации циркулянтной матрицы и разложим ее на произведение матриц, а поскольку, в соответствии с теоремой о циркулянтах, базисом из собственных векторов циркулянтной матрицы являются столбцы матрицы Фурье, то получим:

$$Cir = F^- \cdot \Lambda \cdot F^+, \tag{6}$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица собственных чисел матрицы  $Cir$ , и они же являются спектральными числами последовательности  $P$ :

$$\Lambda = diag(F^+ \cdot P), \tag{7}$$

здесь  $F^+$  и  $F^-$  — матрицы прямого и обратного преобразований Фурье.

Из (6) получим:

$$\begin{aligned} (F^- \cdot \Lambda \cdot F^+) \cdot (F^- \cdot \Lambda \cdot F^+)^T &= \\ = F^- \cdot \Lambda \cdot F^+ \cdot F^+ \cdot \Lambda^T \cdot F^- &= F^- \cdot \Lambda \cdot \Pi \cdot \Lambda^T \cdot F^-, \end{aligned} \tag{8}$$

где  $\Pi = F^+ \cdot F^+ = F^- \cdot F^-$  — перестановочная матрица.

Из (4, 11) следует, что, поскольку  $F^- \cdot \Pi \cdot F^+ = I$ , а  $\Lambda \cdot \Pi \cdot \Lambda^T = \Pi$ , только в том случае, если  $\Lambda \cdot \Lambda^T = I$ , то для того чтобы циркулянтная матрица была ортогональной, необходимо, чтобы произведение диагональной матрицы собственных чисел на нее же транспонированную давало единичную матрицу:

$$\Lambda \cdot \Lambda^T = I. \tag{9}$$

В работе [12] со ссылкой на работы [13–15] показано, что последовательность из  $m$  комплексных чисел, имеющая спектр, расположенный на единичной окружности:

```

m = 8; faz(1:m) = pi/m.*(1:m).*((1:m) + mod(m,2));
for k = 1:m; for j = 1:m; Fp (k, j) = (1/sqrt(m).*exp (-1i*2*pi*k*j/m)); end; end
for k = 1:m; for j = 1:m; Fm (k, j) = (1/sqrt(m).*exp (1i*2*pi*k*j/m)); end; end
PP = round(real(Fp*Fp));
U(1:m) = exp (1i*faz (1:m)); Q1 = ifft (U); Q=Q1*sqrt(m); Sp = fft(Q);
Q2 = ifft (exp (1i*angle (fft (cos (faz (1:m))))));
for k = 1:m; pakf (k) = Q*circshift (Q, -k)'; end % Raschet PAKF
Pic = real (max (abs (Q))/sqrt (var (Q))); % Pik-factor
for k = 1:m; cm(:, k) = circshift (Q, k)'; end; % Cirkulyant matrix
SobChis = eig (cm); L = diag (SobChis); I = round (real (cm'*cm)/m); C = (Fm*L*Fp);
I3 = round (real (C*C') / m);
subplot (3,1,1); plot (1: m, real (Q(1:m)), '*-r' ); title ('Последовательность'); grid on
subplot (3,1,2); plot (1:m, real (pakf (1:m)), '*-b'); title ('ПАКФ'); grid on
subplot (3,1,3); plot (real(U(1:m)), imag (U(1:m)), '*b', cos ((1:360)*2*pi/360), sin ((1:360)*2*pi/360), 'r');
title ('Спектральные числа'); xlim ([-1.2 1.2]); ylim ([-1.2 1.2]); axis equal; grid on
C1 = Fm*diag (Fp*Q')*Fp; I2 = round(C1*C1');

```

**Рис.14.** Программа моделирования многоуровневых последовательностей в среде MathLab

$$P_i = \exp(j \cdot faz_i), i = 1, \dots, m, \tag{10}$$

где  $j$  — мнимая единица обладает идеальной периодической автокорреляционной функцией (ПАКФ), причем основным параметром последовательности (10) является ее длина  $m$ .

Также в [12] предложено использовать квадратичный закон изменения фазы:

$$faz_i = (2\pi / m) \cdot (i + \text{mod}(m, 2)) \cdot i, i = 1, 2, \dots, m. \tag{11}$$

В [12] также предложено вычислять ПАКФ  $R$  так:

$$R_k = \sum_{i=1}^m P_i \cdot \hat{P}_{i+k}, \tag{12}$$

где  $k$  — величина задержки,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\hat{P}$  — символ комплексного сопряжения.

Вместе с тем в работе [12] остался не исследованным вопрос о значении пик-фактора, формируемых последовательностей.

Дело в том, что значение пик-фактора (как отношения максимальной амплитуды сигнала к его среднеквадратическому значению) существенно влияет на эффективность использования мощности передатчика. Теоретическим пределом

является единичный пик-фактор, который свойственен сигналу типа меандр, именно поэтому авторы поставили перед собой задачу поиска такого варианта квадратичного закона изменения фазы, при котором сигнал будет обладать идеальной ПАКФ и одновременно иметь пик-фактор, близкий или равный единице.

Значительно более эффективно (по параметру времени вычислений) АКФ последовательности  $Q$  может быть вычислена с использованием преобразований Фурье:

$$R = F^{-1} \left( F(Q) \cdot \overline{F(Q)} \right), \tag{13}$$

где  $F(X)$ ,  $F^{-1}(X)$  — прямое и обратное преобразования Фурье;  $\overline{F(X)}$  — комплексно-сопряженный спектр, причем спектры в (13) перемножаются поэлементно.

Поэтому вторым не исследованным в работе [12] вопросом является степень связи собственных чисел циркулянтной матрицы и спектральных чисел сформированных последовательностей.

Для выяснения указанной степени связи и влияния параметров последовательности на значение ее пик-фактора авторы применили метод математического моделирования, а в качестве среды выбрали MATLAB.



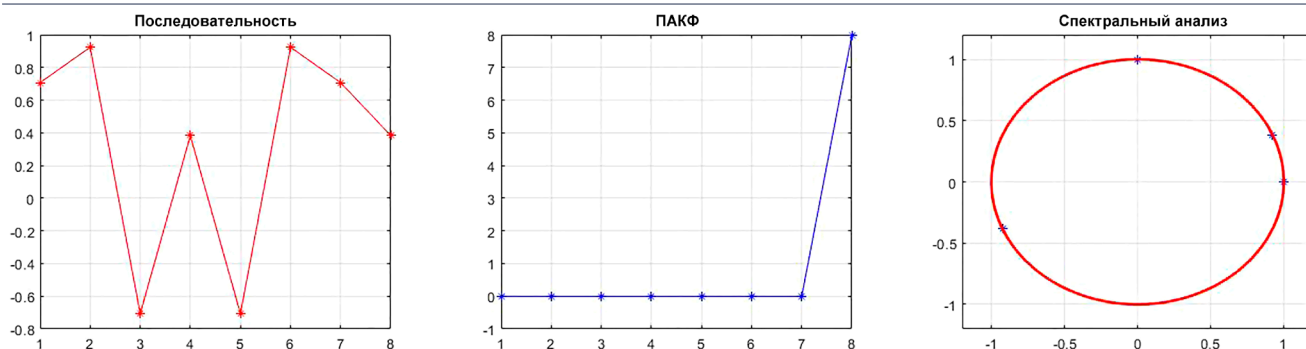


Рис. 15. Последовательность  $m = 8$

Программа в MATLAB представлена на рис. 14.

На рис. 15 представлены результаты расчетов характеристик последовательности с длиной  $m = 8$ , при этом закон изменения фазы соответствовал выражению (11) с дополнительным параметром  $vr$ , при параметре  $vr = 0$ .

$$faz\_i = (\pi / m) \cdot (i + \text{mod}(m, 2) + vr) \cdot (i + vr), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (14)$$

В соответствии с расчетами, пик-фактор данной последовательности в точности оказался равным единице. Циркулянтная матрица последовательности (10) при  $m = 8, vr = 0$  имеет вид:

$$Cir = \begin{bmatrix} -i & -0.92+0.38i & 1 & -0.92+0.38i & -i & 0.92-0.38i & 1 & 0.92-0.38i \\ -0.92+0.38i & 1+i & -0.92+0.38i & -i & 0.92-0.38i & 1 & 0.92-0.38i & -i \\ 1+i & -0.92+0.38i & -i & 0.92-0.38i & 1 & 0.92-0.38i & -i & -0.92+0.38i \\ -0.92+0.38i & -i & 0.92-0.38i & 1 & 0.92-0.38i & -i & -0.92+0.38i & 1 \\ -i & 0.92-0.38i & 1 & 0.92-0.38i & -i & -0.92+0.38i & 1 & -0.92+0.38i \\ 0.92-0.38i & 1 & 0.92-0.38i & -i & -0.92+0.38i & 1 & -0.92+0.38i & -i \\ 1 & 0.92-0.38i & -i & -0.92+0.38i & 1 & -0.92+0.38i & -i & 0.92-0.38i \\ 0.92-0.38i & -i & -0.92+0.38i & 1 & -0.92+0.38i & -i & 0.92-0.38i & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

а ее произведение с транспонированной соответственно:

$$Cir \cdot Cir^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Нормированная на длину последовательности  $m = 8$  матрица (16) становится единичной, значит, последовательность является циркулянтом.

Собственные числа циркулянтной матрицы (15) оказались равными:

$$\lambda = [-2.61-1.08 \quad -2+2i \quad -2.61-1.08i \quad 2-2i \quad 2+2i \quad 2+2i \quad 2.61+1.08i \quad 2.61+1.08i]^T, \quad (17)$$

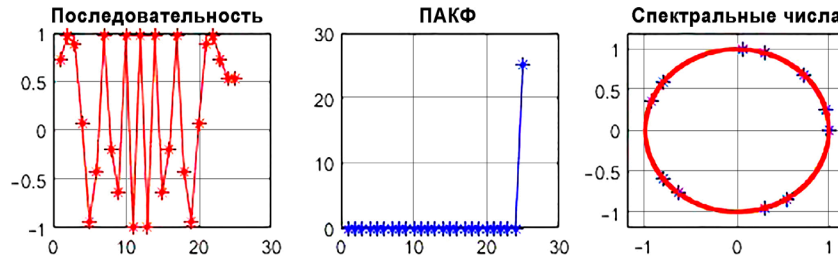


Рис. 16. Последовательность  $m = 25$

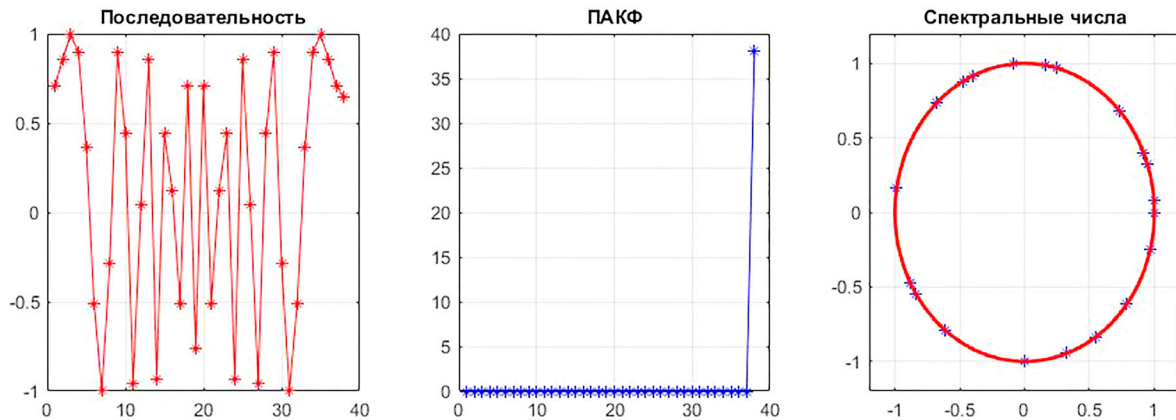


Рис. 17. Последовательность  $m = 38$

а вектор их модулей соответственно:

$$abs(\lambda) = [2.83 \ 2.83 \ 2.83 \ 2.83 \ 2.83 \ 2.83 \ 2.83 \ 2.83]^T, \tag{18}$$

т. е. модули всех собственных чисел циркулянтной матрицы (11) равны и соответствуют корню квадратному из длины последовательности  $\sqrt{m} = 2.83$ .

Спектральные числа последовательности на основе закона изменения фаз (14), рассчитанные как произведение строки на матрицу преобразования Фурье, оказались равными:

$$SC = [0.92 + 0.38i \ 0.71 - 0.71i \ -0.92 - 0.38i \ 0.71 + 0.71i \ -0.92 - 0.38i \ 0.71 - 0.71i \ 0.9 + 0.38i \ 0.71 + 0.71i],$$

а их модули равны = 1.

То есть модули спектральных чисел последовательности и собственных чисел циркулянтной матрицы оказались линейно связанными соотношением:

$$abs(SC) = abs(\lambda) / \sqrt{m}. \tag{19}$$

Следует отметить, что последовательности с параметром  $\nu r$ , отличным от нуля, также являются идеальными, отличающимися от последовательности с  $\nu r = 0$  тем, что все элементы последовательности сдвигаются на  $\nu r$  позиций в сторону, соответствующую знаку параметра  $\nu r$ .

Аналогичные результаты получились для последовательностей с другими параметрами  $m$  и  $\nu r$  (рис. 16, 17).

Вычислительные эксперименты с программой (см. рис. 1) для различных длин последовательностей привели к следующим выводам.

Спектральные числа последовательности  $SC$ , рассчитанные как произведение транспонированного первого столбца циркулянтной матрицы и матрицы Фурье, и модули собственных чисел

$\lambda$  циркулянтной матрицы связаны соотношением  $abs(SC) = abs(\lambda) / \sqrt{m}$ .

ПАКФ может быть рассчитана как произведение вектора строки последовательности и сопряженной циркулянтной матрицы.

### Заключение

В работе рассмотрены возможности по синтезу сигналов, обладающих идеальными автокорреляционными свойствами.

Показано, что для получения сигналов с идеальными автокорреляционными свойствами необходимо, чтобы амплитудный спектр последовательностей был равномерным, фаза спектральных чисел изменялась по квадратичному закону от номера символа в последовательности и все спектральные числа располагались на единичной окружности.

Сгенерированные с такими требованиями последовательности обладают идеальными автокорреляционными свойствами (боковые пики АКФ полностью отсутствуют, и вся энергия сигнала сосредоточена в центральном пике).

Предлагаемые последовательности являются в общем виде комплексными, и использование только их действительной части ухудшает их автокорреляционные свойства.

Для получения указанных свойств при вычислении АКФ необходимо использовать комплексную свертку в частотной области в соответствии с выражением (13) и спектры (основной и комплексно-сопряженный) перемножать поэлементно.

Следует отметить, что все современные системы передачи информации используют только действительные сигналы, и в этом смысле предложенный метод обладает тем недостатком, что для получения идеальных свойств необходимо в канале связи передавать одновременно и действительную и мнимую часть предложенных последовательностей, т. е. передавать, по сути, два сигнала. Причем они оба будут искажены шумом канала, что, возможно, приведет к ухудшению идеальных свойств сигналов.

Вместе с тем если на приемной стороне сам сигнал полностью известен и не известно только время его прихода, тогда мнимую часть сигнала можно не передавать, а просто хранить в памяти цифрового приемника.

Применение предложенных сигналов позволит существенно повысить помехоустойчивость каналов в системах железнодорожной автоматики и связи и обеспечить их надежную работу в условиях, когда отношение сигнал/шум на входе много меньше единицы. ✂

### Библиографический список

1. Шаманов В. И. Проблемы электромагнитной совместимости рельсовых цепей с тяговой сетью / В. И. Шаманов // Автоматика на транспорте. — 2019. — Т. 5. — № 2. — С. 160–185. DOI: 10.20295/2412-9186-2019-5-2-160-185.
2. ГОСТ 33436.2-2016. Межгосударственный стандарт. Совместимость технических средств электромагнитная. Системы и оборудование железнодорожного транспорта.
3. Шатохин В. А. Электромагнитная совместимость систем железнодорожной автоматики и телемеханики / В. А. Шатохин // Технологии электромагнитной совместимости. — 2004 — № 1(8). — С. 22–29.
4. Егоров В. В. Временная синхронизация в системах связи амплитудно-фазоманипулированными сигналами / В. В. Егоров, Е. Ф. Щеглова // Тезисы докладов научно-технической конференции «Повышение качества и эффективности устройств синхронизации в системах связи». Российское научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи им. А. С. Попова. Секция устройств синхронизации. Ярославский Государственный Университет, Московский технический Университет связи и информатики, Ярославль, 25–27 мая 1993. — Ярославль: РНТОРЭС им. А. С. Попова, 1993. — С. 54.
5. Культин В. Б. Полосовой цифровой фильтр с временной обработкой в аппаратуре тональных рельсовых цепей / В. Б. Культин, С. А. Суханов, В. А. Ходаковский; ред. Вл. В. Сапожников, В. В. Сапожников, А. А. Прокофьев // Автоматика и телемеханика железных дорог России. Новая техника и новые технологии: сборник научных трудов. Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I. — СПб., 2007. — С. 94–97.
6. Ходаковский В. А. Синтез многополосного фильтра с требуемой частотной характеристикой / В. А. Ходаковский, Т. В. Ходаковский // Интеллектуальные технологии на транспорте. — 2015. — № 1(1). — С. 38–42.
7. Ходаковский В. А. Мера сходства узкополосных сигналов / В. А. Ходаковский, Т. В. Ходаковский // Автоматика на транспорте. ПГУПС. — СПб., 2015. — Т. 1. — № 2. — С. 180–194.
8. Дегтярев В. Г. Многокритериальное управление вагонами на железнодорожном транспорте / В. Г. Дегтярев, В. А. Ходаковский // Интеллектуальные технологии на транспорте. — СПб., 2016. — № 3(7). — С. 14–20.
9. Ходаковский В. А. Теорема отсчетов и обратное ее толкование для анализа сигналов с ограниченным спектром / В. А. Ходаковский // Проблемы математический и естественно-научной подготовки в инженерном образовании: сборник трудов IV Международной научно-методической конференции. — СПб., 2017. — С. 135–147.
10. Ходаковский В. А. Синтез сигналов с оптимальными по уровню боковых лепестков автокорреляционными свойствами / В. А. Ходаковский, В. Г. Дегтярев, П. В. Герасименко,

- С. В. Микони // Известия Петербургского университета путей сообщения. — 2018. — Т. 15. — № 4. — С. 629–636.
11. Ходаковский В. А. Об одном способе подавления боковых лепестков функции автокорреляции / В. А. Ходаковский, С. А. Лобов // Интеллектуальные технологии на транспорте. — СПб., 2020. — № 4(24). — С. 46–50.
  12. Дворников В. Д. Многофазные последовательности с идеальными корреляционными свойствами / В. Д. Дворников // Доклады БГУИР. — 2003. — Т. 1. — № 1.
  13. Chu D. Polyphase codes with good periodic correlation properties (Corresp.) / D. Chu // IEEE Trans. Inform. Theory. — 1972. — Vol. IT–18. — № 3. — Pp. 531–532.
  14. Frank R. I. Phase shift pulse codes with good periodic correlation properties / R. I. Frank, S. A. Zadoff // IRE Trans. Inform. Theory. — 1962. — Vol. IT–8. — Pp. 381–382.
  15. Heimler R. C. Phase shift pulse codes with good periodic correlation properties / R. C. Heimler // IRE Trans. Inform. Theory. — 1961. — Vol. IT–7. — Pp. 254–257.

TRANSPORT AUTOMATION RESEARCH, 2022, Vol. 8, No. 1, pp. 78–89  
DOI: 10.20295/2412-9186-2022-8-01-78-89

## Synthesis of Sequences with Ideal Autocorrelation Properties

### Information about authors

**Egorov V. V.**, Second Doctoral Degree in Technical Sciences, Professor<sup>1</sup>.  
E-mail: egorovrimr@mail.ru

**Lobov S. A.**, Second Doctoral Degree in Technical Sciences, Technical Consultant<sup>2</sup>, Professor<sup>1</sup>. E-mail: Isa\_rimr@mail.ru

**Khodakovskiy V. A.**, Second Doctorate Degree in Technical Sciences, Professor<sup>3</sup>. E-mail: hva1104@mail.ru

<sup>1</sup>State University of Instrumentation, Base Department of Radio Engineering and Communication Means for Telemedicine and Ministry of Emergency Situations, Saint Petersburg

<sup>2</sup>Projection Bureau "RIO", Saint Petersburg

<sup>3</sup>Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, Saint Petersburg

**Abstract:** Method of synthesis of the sequences, possessing ideal autocorrelation functions, has been developed. The review of existing approaches, analytical conclusion of requirements to ideal sequences with considering the necessity to provide low pick-factor of the sequence and low level of side petals of autocorrelation function has been given. Mathematical model and its program embodiment, allowing to generate periodical sequences and assess their properties, have been created on the basis of suggested method. As a result of pursued computational experiments, the sequences with number of symbols from 6 to 4096 have been obtained. It's been clarified that such sequence can be formed at its any length which has ideal periodic autocorrelation function at pick-factor equal or close to 1. Because suggested sequences have ideal ACF they can be recommended for use in the systems of railway automatics and communication for highly reliable management of train traffic on high-speed trunks as well as in communication systems qua signals in navigating and locational systems, qua signals applied in ultrasound defectoscopy and so on.

**Key words:** random sequences; Chirp signals; spectral numbers; Fourier transform; autocorrelation function; side picks of ACF; circulants; sequence pick-factor.

### References

1. Shamanov V. I. Problemy jelektronnogo sovmestimosti rel'sovyh cepej s t'jagovoj set'ju [Problems of electromagnetic compatibility of rail circuits with a traction network]. *Avtomatika na transporte* [Automatic on transport]. 2019, V. 5, I. 2, pp. 160–185. DOI: 10.20295/2412-9186-2019-5-2-160-185.
2. GOST 33436.2-2016. *Mezhgosudarstvennyj standart. Sovmestimost' tehniceskikh sredstv jelektronnogo transporta* [GOST 33436.2-2016. Interstate standard. Compatibility of technical means is electromagnetic. Systems and equipment of railway transport].
3. Shatohin V. A. Jelektronnaja sovmestimost' sistem zheleznodorozhnoj avtomatiki i telemehaniki [Electromagnetic compatibility of railway automation and remote control systems]. *Tehnologii jelektronnogo transporta* [Electromagnetic compatibility technologies]. 2004, I. 1(8), pp. 22–29.
4. Egorov V. V. Vremennaja sinhronizacija v sistemah svjazi amplitudno-fazomanipulirovannymi signalami [Time synchronization in communication systems with amplitude-phase-shift keyed signals]. *Tezisy dokladov nauchno-tehniceskoj konferencii «Povyshenie kachestva i jeffektivnosti ustrojstv sinhronizacii v sistemah svjazi»*. Rossijskoe nauchno-tehniceskoe obshhestvo radiotekhniki, jelektroniki i svjazi im. A. S. Popova. *Sekcija ustrojstv sinhronizacii. Jaroslavl'skij Gosudarstvennyj Universitet, Moskovskij tehniceskij Universitet svjazi i informatiki, Jaroslavl'*; 25–27 maja 1993 [Abstracts of the scientific and technical conference "Improving the quality and efficiency of synchronization devices in communication systems". Russian Scientific and Technical Society of Radio Engineering, Electronics and Communications. A. S. Popova. Synchronization devices section. Yaroslavl State University, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Yaroslavl, May 25–27, 1993]. Jaroslavl': RNTORJeS im. A. S. Popova Publ., 1993, p. 54.
5. Kul'tin V. B. Polosovoj cifrovij fil'tr s vremennoj obrabotkoj v apparature tonal'nyh rel'sovyh cepej [Khodakovskij, Band-pass digital filter with time processing in the equipment of tonal rail circuits]. *Avtomatika i telemehanika zheleznovyh dorog Rossii. Novaja tehnika i novye tehnologii: sbornik nauchnyh trudov. Peterburgskij gosudarstvennyj universitet putej soobshhenija Imperatora Aleksandra I* [Automation and telemechanics of Russian railways. New technique and new technologies: collection of scientific papers. Petersburg State University of Communications of Emperor Alexander I]. St. Petersburg, 2007, pp. 94–97.
6. Hodakovskij V. A. Sintez mnogopolosnogo fil'tra s trebuemoj chastotnoj karakteristikoj [Synthesis of a multiband filter with the required frequency response]. *Intellektual'nye tehnologii na transporte* [Intelligent technologies in transport]. 2015, I. 1(1), pp. 38–42.
7. Hodakovskij V. A. Mera shodstva uzkopolosnyh signalov ["Measure of similarity of narrowband signals"]. *Avtomatika na transporte. PGUPS* [Automatic on transport. PGUPS]. St. Petersburg, 2015, V. 1, I. 2, pp. 180–194.
8. Degtjarev V. G. Mnogokriterial'noe upravlenie vagonami na zheleznodorozhnom transporte [Multi-criteria control of wagons in railway transport]. *Intellektual'nye tehnologii na transporte* [Intelligent technologies in transport]. St. Petersburg, 2016, I. 3(7), pp. 14–20.
9. Hodakovskij V. A. Teorema otschetov i obratnoe ee tolkovanie dlja analiza signalov s ograničennym spektrom [The sampling theorem and its reverse interpretation for the analysis of signals with a limited spectrum]. *Problemy matematičeskij i estestvenno-nauchnoj podgotovki v inženernom obrazovanii: sbornik trudov IV Meždunarodnoj nauchno-metodičeskoj konferencii* [Problems of mathematical and natural science training in engineering education: collection of proceedings of the IV International Scientific methodical conference]. St. Petersburg, 2017, pp. 135–147.
10. Hodakovskij V. A. Sintez signalov s optimal'nymi po urovnju bokovyh lepestkov avtokorreljacionnymi svojstvami [Synthesis of signals with autocorrelation properties optimal in terms of the level of side lobes]. *Izvestija Peterburgskogo universiteta putej soobshhenija* [Proceedings of the St. Petersburg University of Communications]. 2018, V. 15, I. 4, pp. 629–636.
11. Hodakovskij V. A. Ob odnom sposobе podavlenija bokovyh lepestkov funkcii avtokorreljacionnoj [On one method of suppressing the side lobes of the autocorrelation function]. *Intellektual'nye tehnologii na transporte* [Intelligent technologies in transport]. St. Petersburg, 2020, I. 4(24), pp. 46–50.
12. Dvornikov V. D. Mnogofaznye posledovatel'nosti s ideal'nymi korreljacionnymi svojstvami [Multiphase sequences with ideal correlation properties]. *Doklady BGUIR [Doklady BSUIR]*. 2003, V. 1, I. 1.
13. Chu D. Polyphase codes with good periodic correlation properties (Corresp.) / D. Chu // IEEE Trans. Inform. Theory. — 1972. — Vol. IT–18. — I. 3. — Pp. 531–532.
14. Frank R. I. Phase shift pulse codes with good periodic correlation properties / R. I. Frank, S. A. Zadoff // IRE Trans. Inform. Theory. — 1962. — Vol. IT–8. — Pp. 381–382.
15. Heimler R. C. Phase shift pulse codes with good periodic correlation properties / R. C. Heimler // IRE Trans. Inform. Theory. — 1961. — Vol. IT–7. — Pp. 254–257.