

УДК 519.837

**Н. В. Грибкова, А. М. Фресин**

## Марковские цепи в теории надежности и их применение в некоторых задачах транспорта с моделированием в MATLAB (Simulink)

**Грибкова Надежда Викторовна** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика»

**Фресин Артем Максимович** — студент 3-го курса группы УПП-309

*Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Санкт-Петербург, Россия*

**Аннотация.** Цепи Маркова играют ключевую роль в математическом описании случайных процессов, происходящих в системах, состоящих из многих элементов. Все возможные состояния системы по числу и степени отказа ее элементов рассматриваются как значения, принимаемые случайным процессом с непрерывным временем. Описание и исследование таких систем существенно облегчается, если можно допустить, что они обладают марковским свойством. Мы рассматриваем в этой работе систему надежности типа  $k$  из  $n$  с резервированием и применяем к ее исследованию теорию цепей Маркова. Выполнено моделирование системы в MATLAB (Simulink).

**Ключевые слова:** надежность, восстанавливаемые системы, резервирование, системы  $k$  из  $n$ , цепи Маркова

Если надежность системы, состоящей из многих элементов, рассматривать во времени, то естественным путем ее математического описания являются случайные процессы. Для того чтобы создать математическую модель системы, все ее состояния, число которых конечно, описываются по числу и степени отказов ее элементов, затем все множество возможных состояний  $X$  разбивается на два класса:

- $X_0$  — критические состояния, при которых система неработоспособна;
- $X_1$  — состояния, при которых система выполняет свои функции.

Затем определяется случайный процесс  $X(t)$ ,  $t > 0$ , принимающий значения во множестве  $X$  и переходящий со временем из состояния в состояние. Моментом отказа системы является момент  $t_0$  первого попадания значения процесса во множество критических состояний  $X_0$ . В общем случае применение теории случайных процессов для расчета характеристик надежности связано с решением сложных математических задач.

Однако в случае, когда можно предположить наличие так называемого марковского свойства, когда при фиксированном в любой определенный момент состоянии

системы ее поведение (вероятностная структура) в будущем не зависит от состояний, которые она принимала в предшествующие моменты времени, то есть в прошлом, исследование существенно упрощается, поскольку для марковских случайных процессов имеется хорошо разработанная и довольно несложная в применении теория. Благодаря возможности общего решения дифференциальных уравнений Колмогорова вероятности всех состояний системы можно определить как функции времени и найти также стационарные (то есть предельные при  $t \rightarrow \infty$ ) вероятности состояний.

В этой работе мы рассматриваем систему с  $n$ -однотипными элементами, каждый из которых выходит из строя с постоянной интенсивностью  $\lambda$ . Система функционирует нормально, если работоспособны по крайней мере  $k$  из  $n$  ее элементов ( $1 \leq k \leq n$ ). Такая система называется системой типа  $k$  из  $n$  [1, 2]. Например, состоящие из нескольких дублирующих друг друга элементов контроллеры в системах автоматики на транспорте, когда контроллер сохраняет работоспособность, пока исправны по крайней мере два или три из ее элементов.

Наличие марковского свойства у описывающего систему случайного процесса всегда связано с наличием экспоненциального распределения интервалов между переходами системы из одного состояния в другое.

Если ремонт не предусмотрен, то распределение времени безотказной работы системы  $k$  из  $n$ , вообще говоря, не экспоненциальное (кроме случая, когда  $k = n$ ). Ее функция надежности имеет вид [1, с. 64]:

$$R(t) = \sum_{i=k}^n C_n^i e^{-i\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-i}$$

и функция распределения времени безотказной работы  $T$  равна [1]:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - R(t) = \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i e^{-i\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-i},$$

то есть распределение не является экспоненциальным. Если рассматривать систему только до момента ее первого отказа, игнорируя дальнейшее (ремонт), то мы можем найти, например, среднее время безотказной работы  $T_{\text{ср.}}$  этой системы (наработку до отказа), которая, как известно [1, 2], вычисляется как интеграл от функции надежности:

$$\begin{aligned} T_{\text{ср.}} &= \int_0^\infty R(t) dt = \int_0^\infty \sum_{i=k}^n C_n^i e^{-i\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-i} dt = \sum_{i=k}^n C_n^i \int_0^\infty e^{-i\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-i} dt = \\ &= \sum_{i=k}^n C_n^i \frac{1}{\lambda} \int_0^1 x^{i-1} (1-x)^{n-i} dx = \sum_{i=k}^n C_n^i \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma(i) \Gamma(n-i)}{\Gamma(n+1)} = \sum_{i=k}^n C_n^i \frac{1}{\lambda} \frac{(i-1)!(n-i-1)!}{n!} = \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=k}^n \frac{1}{i} = \frac{1}{k\lambda} + \frac{1}{(k+1)\lambda} + \dots + \frac{1}{n\lambda}. \end{aligned}$$

Однако если рассматривать систему  $k$  из  $n$  как восстанавливаемую, предполагая восстановление элементов при их отказе до состояния «как новый» (или замену), то методы теории марковских случайных процессов становятся применимыми для вычисления ряда ее показателей.

Предположим, что при выходе из строя одного из элементов его ремонт начинается немедленно. Интенсивность ремонтных работ — одна бригада. Состоянием системы будем считать количество неисправных элементов. На рис. 1 представлена диаграмма переходов системы между состояниями.

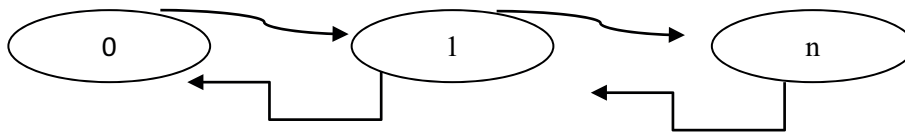


Рис. 1. Диаграмма интенсивностей изменения состояний системы

Если все элементы исправны (состояние 0), то интенсивность перехода в состояние 1 равна  $n\lambda$ , так как на подходе к моменту отказа находятся все  $n$  элементов. Из состояния 1 в состояние 2 система переходит с интенсивностью  $(n - 1)\lambda$ , поскольку потребность в ремонте возникает у  $(n - 1)$  элементов. Аналогичным образом определяются интенсивности последующих переходов.

Формула интенсивности перехода из состояния  $i$  в состояние  $(i + 1)$  (где  $i = 0, \dots, n - 1$ ) имеет вид:

$$\lambda_i = \lambda(n - i).$$

Интенсивность переходов из состояния  $i$  в состояние  $(i - 1)$  (где  $i = n, \dots, 1$ ) одинакова и равна параметру  $\mu$ , так как работает только одна ремонтная бригада.

Поскольку переходы возможны только между соседними состояниями (что обусловлено постоянством интенсивностей отказов и восстановлений элементов), случайный процесс  $N(t)$  при  $t > 0$  (число неисправных элементов в момент времени  $t$ ) представляет собой процесс рождения и гибели. Он аналогичен процессу в замкнутой системе обслуживания с  $n$  возможными клиентами [4, 7, 8].

Следовательно, можно определить вероятности всех состояний системы как функции времени. Если известно начальное распределение вероятностей состояний (например, все элементы исправны, то есть  $p = (1, 0, \dots, 0)$ , и с вероятностью 1 наблюдается состояние 0 — отсутствие неисправных элементов), то решение системы дифференциальных уравнений Колмогорова для вектора вероятностей состояний  $p(t) = p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$  можно выразить формулой  $p(t) = e^{\Lambda t}$ , где  $\Lambda$  — трехдиагональная матрица интенсивностей переходов [4].

На практике чаще всего интерес представляют стационарные вероятности состояний, получаемые предельным переходом при  $t \rightarrow \infty$ . Поскольку процесс  $N(t)$

соответствует процессу числа требований в системе обслуживания замкнутого типа, то для определения стационарных вероятностей мы можем воспользоваться формулами из [4] (см. также [7, 8]).

Обозначим  $\rho = \lambda/\mu$  — отношение интенсивности отказов к интенсивности восстановления и

$$A_n^i = \frac{n!}{(n-i)!} —$$

число размещений из  $n$  элементов по  $i$ . Тогда для вероятностей состояний восстанавливаемой системы  $k$  из  $n$  получаем:

$$p_i = p_0 \rho^i A_n^i,$$

$$\text{где } p_0 = \left( 1 + \sum_{i=1}^n \rho^i A_n^i \right)^{-1}.$$

Эти формулы позволяют найти характеристики системы  $k$  из  $n$  в стационарном режиме:

$$K_{\text{ср.}} = \sum_{i=0}^{n-k} p_i = p_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-k} \rho^i A_n^i \right) — \text{коэффициент средней готовности};$$

$\omega_{\text{п.}} = p_{n-k} k \lambda$  — интенсивность потока отказов, то есть среднее число отказов в единицу времени;

$$T_{\text{ср.}} = \frac{K_{\text{ср.}}}{\omega_{\text{п.}}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-k} p_i}{p_{n-k} k \lambda} — \text{средняя наработка между отказами системы};$$

$$W_{\text{ср.}} = \frac{1 - K_{\text{ср.}}}{\omega_{\text{п.}}} = \frac{\sum_{i=n-k+1}^n p_i}{p_{n-k} k \lambda} — \text{среднее время восстановления};$$

$$N_{\text{ср.}} = \sum_{i=0}^n i p_i = p_0 \sum_{i=1}^n i \rho^i A_n^i = p_0 n! \sum_{i=1}^n i \frac{\rho^i}{(n-i)!} — \text{среднее число неисправных элементов};$$

$$p_0 = \left( 1 + \sum_{i=1}^n \rho^i A_n^i \right)^{-1} — \text{вероятность простоя ремонтной бригады}.$$

Работа системы  $k$  из  $n$  была смоделирована в динамике средствами MATLAB (Simulink). При моделировании сравнивались теоретические показатели надежности с их статистическими оценками, полученными на основе моделирования. На рис. 2 приведен фрагмент программы Simulink, разработанной А. М. Фресиным.

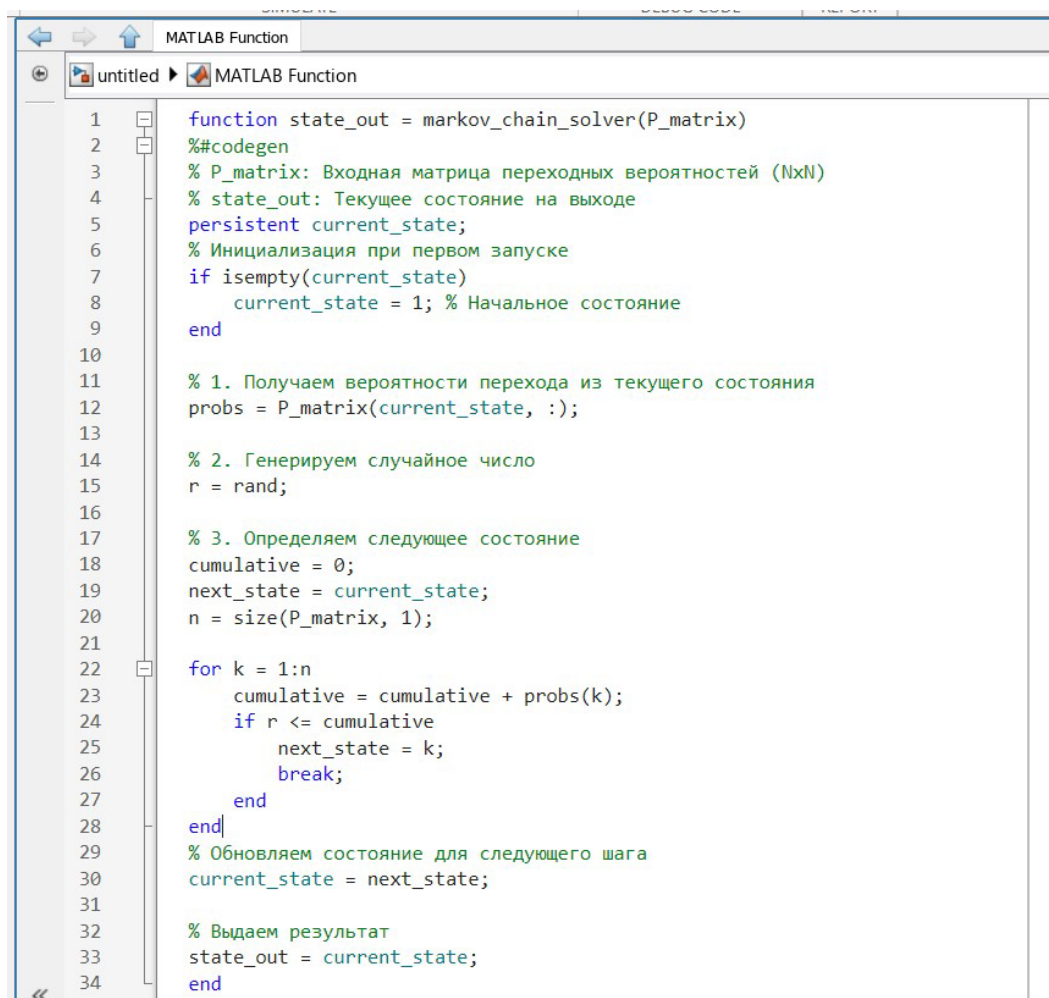


Рис. 2. Программа, моделирующая цепь Маркова, которая описывает систему надежности

## Список источников

1. Грибкова Н. В. Основы теории надежности: учебное пособие. СПб.: ПГУПС, 2022. 155 с.
2. Бестужева А. Н., Грибкова Н. В., Кударов Р. С. Практикум по основам теории надежности: учебно-методическое пособие. СПб.: ПГУПС, 2024. 78 с.
3. Бестужева А. Н., Грибкова Н. В. Развитие учебно-методической базы по основам теории надежности для инженерных специальностей ПГУПС // Сборник трудов V Бетанкуровского международного инженерного форума. СПб.: ПГУПС, 2023. С. 73–76.
4. Боровских Ю. В., Грибкова Н. В. Системы обслуживания: учебное пособие. СПб.: ПГУПС, 1995. 144 с.
5. Боровских Ю. В., Грибкова Н. В. Системы и сети с очередями: учебное пособие. СПб.: ПГУПС, 1995. 143 с.
6. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ. Изд. 3-е.

Серия «Классика инженерной мысли: надежность и отказоустойчивость». М.: Ленанд, 2019. 584 с.

7. Марковские системы с очередями: методические указания / сост.: Ю. В. Боровских, Н. В. Грибкова. СПб.: ПГУПС, 1995. 46 с.
8. Системы и сети с очередями в MATLAB: метод. указания / сост.: Ю. В. Боровских, Л. В. Гадасина, Н. В. Грибкова. СПб.: ПГУПС, 2004. 60 с.

**N. V. Gribkova, A. M. Fresin**

## Markov Chains in Reliability Theory and Their Application to Certain Transportation Problems, with Modeling in MATLAB (Simulink)

**Gribkova Nadezhda Viktorovna** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department “Higher Mathematics”

**Fresin Artem Maksimovich** — 3rd-Year Student of group UPP-309

*Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, Saint Petersburg, Russia*

**Abstract.** Markov chains play a key role in the mathematical description of random processes occurring in systems composed of many elements. All possible system states, characterized by the number and failure degree of its elements, are considered as the values taken by a continuous-time stochastic process. The description and analysis of such systems are significantly simplified if the Markov property can be assumed. In this work, we consider a k-out-of-n reliability system with redundancy and apply Markov chain theory to its study. The system modeling was performed in MATLAB (Simulink).

**Keywords:** reliability, repairable systems, redundancy, k-out-of-n systems, Markov chains

УДК 004.414.32

**Е. Г. Егорова, И. В. Ляной, В. А. Фадеев**

## Имитатор прохода железнодорожного колеса

**Егорова Екатерина Геннадьевна** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматика и телемеханика на железных дорогах»

**Ляной Иван Вадимович** — студент 4-го курса кафедры «Автоматика и телемеханика на железных дорогах»

**Фадеев Виталий Александрович** — студент 4-го курса кафедры «Автоматика и телемеханика на железных дорогах»