

УДК 624.131.532

## Механизмы формирования бокового давления грунта в соответствии с упрощенной дискретной моделью песка

К. В. Сливец, П. А. Кравченко

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Россия, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

**Для цитирования:** Сливец К. В., Кравченко П. А. Механизмы формирования бокового давления грунта в соответствии с упрощенной дискретной моделью песка // Известия Петербургского университета путей сообщения. СПб.: ПГУПС, 2026. Т. 23. Вып. 1. С. 146–153. DOI: 10.20295/1815-588X-2026-1-146-153

### Аннотация

**Цель:** рассмотрение механизмов формирования коэффициента бокового давления грунта в состоянии покоя  $K_0$  на уровне его элементарной структуры — микроструктуры грунта. Его базовыми элементами являются частицы твердой фазы. Объектом исследования являлась дискретная среда — чистый кварцевый песок средней крупности. **Методы:** в качестве модели рассмотрена монодисперсная среда с периодической укладкой зерен — дискретная среда с одинаковым размером, формой частиц и регулярной их укладкой. Очевидно, что такого рода среда является значительным упрощением, так как реальный грунт — это набор зерен различных размеров, которые могут отличаться на несколько порядков. Моделирование с учетом реального распределения частиц по крупности существенно усложняет процесс исследования. Только в условиях монодисперсной среды становится возможным однозначно определять предельные плотности сложения и получать аналитические выражения для коэффициента бокового давления. Обобщены имеющиеся теоретические решения, применяемые при определении коэффициента бокового давления для сред такого рода. При численном моделировании для описания зернистых сред использован инструментарий механики дискретных сред, в котором элементарный объем грунта рассматривается как механизм, состоящий из некоторого количества взаимодействующих зерен и подчиняющийся основным постулатам динамики. Произведено численное моделирование среды в условиях формирования  $K_0$  с использованием метода дискретных элементов. **Результаты:** показано, что теоретические зависимости действительны только до определенных значений пористости и плотности сложения. При пористости, близкой к предельной, наблюдается резкий рост коэффициента бокового давления в сравнении с теоретическими результатами. Сравнение с лабораторными экспериментами по определению  $K_0$  показывает существенное отличие. Так, рассматриваемая упрощенная модель прогнозирует большее значение  $K_0$  для рыхлого песка в сравнении с более плотной его укладкой. В лабораторных экспериментах наблюдалась обратная зависимость. **Практическая значимость:** результаты работы имеют теоретическое значение для механики грунтов, так как процессы формирования коэффициента бокового давления рассматриваются с точки зрения механики дискретных сред. Подобный подход позволяет рассмотреть грунтовый объем как механизм и детально проследить вклад каждой из его характеристик в рассматриваемый процесс.

**Ключевые слова:** зернистые среды, песок, коэффициент, трение, микроструктура песка, моделирование

Определение коэффициента бокового давления грунта в состоянии покоя  $K_0$  (далее — коэффициент бокового давления) имеет важное теоретическое и практическое значение. Выражение для коэффициента бокового давления можно получить на основании деформационных

характеристик среды. Широко известно выражение, получаемое в рамках теории упругости, при котором величина  $K_0$  постоянна. При использовании более сложных моделей зависимость для  $K_0$  может носить нелинейный характер и зависеть от уровня действующих напряжений.

Следует отметить, что эти выражения в итоге носят феноменологический характер, так как деформационные характеристики моделей выбираются таким образом, чтобы максимально приблизиться к результатам лабораторных испытаний. Эти характеристики, в свою очередь, однозначно определяют значение коэффициента бокового давления.

Иным по отношению к механике сплошных сред является подход, когда элементарный объем грунта рассматривается как набор взаимодействующих частиц (зерен). В этом случае для описания используется инструментарий механики дискретных сред, в котором элементарный объем грунта рассматривается как механизм, состоящий из некоторого количества взаимодействующих зерен и подчиняющийся основным постулатам динамики.

Наиболее распространенным методом решения подобных задач является метод дискретных элементов — численный метод, исходящий из рассмотрения упрощенной формы частиц (зерен) дискретной среды: в виде шаров для пространственной постановки задачи и дисков — для двумерной. С его помощью возможно моделировать грунт, точнее некоторый его малый объем. Задавая надлежащую схему нагружения, можно добиться условий, соответствующих ситуации, которую описывает коэффициент давления грунта в состоянии покоя.

Реальный грунт — это набор зерен различных размеров, которые могут отличаться на несколько порядков. Моделирование с учетом

соотношения фракций по крупности сложно и ведет к непропорциональному росту трудоемкости. Поэтому при постановке задачи следует идти по пути максимального упрощения. Этим обусловлено рассмотрение в данной статье монодисперсной среды — среды с одинаковым размером, формой частиц и их периодической укладки. Очевидно, что в этом случае рассматриваемая упрощенная модель будет отражать свойства только узкой разновидности грунтов — однородных песков. Также очевидно, что предположение о периодической укладке частиц является значительным упрощением, однако в такой постановке становится возможным однозначно определять плотность сложения среды и получать аналитические выражения для коэффициента бокового давления. Таким образом, для рассмотрения механизма формирования коэффициента бокового давления использовалась упрощенная расчетная схема дискретной среды: двумерная, монодисперсная среда с периодической укладкой частиц (дисков) правильной круглой формы.

Можно показать, что для такой среды наиболее плотной будет являться гексагональная укладка, а наименее плотной — диагональная кубическая [1]. Плотность укладки может быть охарактеризована величинами  $\tilde{n}$ ,  $\tilde{m}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{\min}$  и  $\tilde{\epsilon}_{\max}$  — пористостью, объемной долей твердой фазы и коэффициентами пористости в максимально возможном плотном и рыхлом состояниях соответственно. Волна над символом пористости и других величин означает, что они относятся к двумерной задаче.

Введем характерный угол  $2\theta$ , который будет меняться при переходе от наиболее плотного состояния к наиболее рыхлому. Для гексагональной укладки  $2\theta = 60^\circ$  (рис. 1а), а для диагональной кубической  $2\theta = 90^\circ$  (рис. 1б), то есть с увеличением угла уменьшается плотность сложения частиц.

Свяжем плотность укладки с углом  $\theta$ . Для гексагональной упаковки  $\tilde{m} = \pi/(2\sqrt{3}) \approx 0,9096$  и соответствующая ей пористость  $\tilde{n} = 1 - \tilde{m} = 1 - 0,9096 \approx 0,090$ . Также для нее обозначим коэффициент пористости как  $\tilde{e}_{\min}$ , ведь такое состояние является наиболее плотным из возможных. Величина  $\tilde{e}_{\min}$  составит 0,0994.

В наиболее рыхлой — квадратной диагональной упаковке:  $\tilde{m} = \pi/4 \approx 0,7854$ , пористость  $\tilde{n} = 1 - \tilde{m} = 1 - 0,7854 \approx 0,215$ , соответствующий коэффициент пористости  $\tilde{e}_{\max}$  составит 0,2726.

Выразим изменение пористости как функцию от  $2\theta$ . Для этого рассмотрим частицы с центром в точках А, В, С и D и радиусом  $r$  (рис. 2).

Для частиц с центром в точках А и С площадь сектора  $S_1$ , ограниченного сторонами ромба, может быть найдена на основании зависимости (1). Аналогично может быть найдена площадь сектора  $S_2$  и для частиц с центром в точках В и D на основании зависимости (2).

$$S_1 = \frac{2\beta\pi r^2}{360^\circ}, \quad (1)$$

$$S_2 = \frac{(180^\circ - 2\beta)\pi r^2}{360^\circ}, \quad (2)$$

$$S_{ABCD} = 4r^2 \sin 2\theta. \quad (3)$$

Согласно уравнениям (1–3), объемная доля частиц в ячейке (ромб ABCD) может быть записана в виде:

$$\tilde{m} = (2S_1 + 2S_2)/S_{ABCD} = \pi/4 \sin 2\theta, \quad (4)$$

откуда угол  $\theta$  равен:

$$\theta = \frac{\arcsin \frac{\pi}{4\tilde{m}}}{2}. \quad (5)$$

Далее возможно рассмотреть простейшую систему, состоящую из 3 частиц (рис. 3).

Если выполнить осреднение усилий в контактах по некоторой площади (объему), то воз-

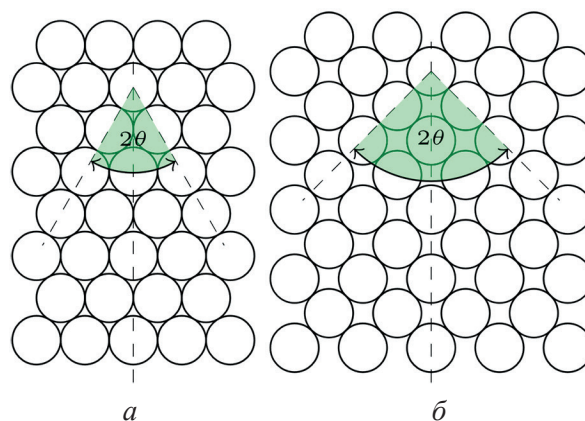


Рис. 1. Схема укладки дисков: а — если угол равен  $60^\circ$ ; б — если угол равен  $90^\circ$

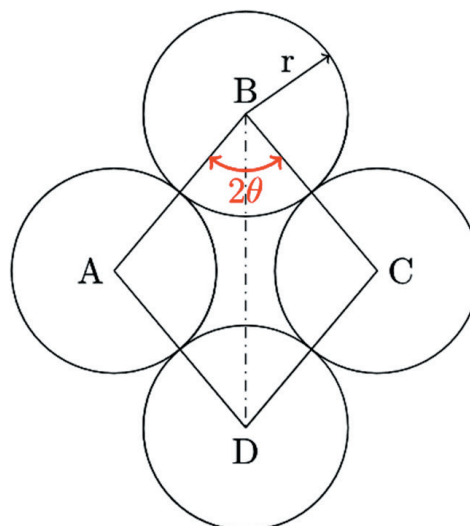


Рис. 2. Фрагмент среды с периодической укладкой

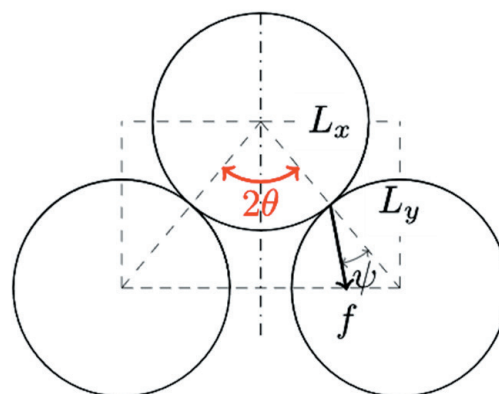


Рис. 3. Схема взаимодействия частиц

можно перейти к напряжениям. Для этой цели чаще всего используют формулу Лява [2]:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum f_i \cdot L_j, \quad (6)$$

где  $f_i$  — компоненты вектора силы в контакте,  $L_i$  — компоненты вектора, соединяющего центры контактирующих частиц. В нашем случае  $\sigma_{11} = \sigma_x$  и  $\sigma_{22} = \sigma_y$ :

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{f_0 \sin(\theta - \psi) 2r \sin \theta}{f_0 \cos(\theta - \psi) \cdot 2r \cos \theta} = \tan(\theta - \psi) \cdot \tan \theta. \quad (7)$$

Следующее выражение может быть получено путем подстановки уравнения (5) в уравнение (7):

$$K_0 = \tan \left( \frac{\arcsin \frac{\pi}{4\tilde{m}} - \psi}{2} \right) \cdot \tan \frac{\arcsin \frac{\pi}{4\tilde{m}}}{2}, \quad (8)$$

где  $\psi$  — угол трения материала частиц.

Полученные теоретические зависимости, очевидно, нуждаются в подтверждении моделированием. Несмотря на простоту модели монодисперсной среды, постановка натурального эксперимента достаточно сложна. Метод

дискретных элементов (МДЭ) [3, 4] позволяет произвести численное моделирование, существенно сократив затрачиваемые ресурсы. Численный эксперимент реализовывался в программном комплексе PFC 2D (Itasca). Моделирование проводилось для частиц диаметром 0,25 мм, что соответствует песку средней крупности [9].

Характеристики жесткости контактов в модели назначались на основании решения задачи контактного взаимодействия частиц соответствующего материала формы и размеров [4, 5, 9]. В качестве материала частиц был рассмотрен чистый кварц. Было получено следующее соотношение жесткостей контактов в нормальном  $K_n$ - и тангенциальном  $K_t$ -направлениях:  $K_n / K_t = 1,04$ . Коэффициент трения материала частиц  $\mu = \tan \psi$ , то есть кварца, составляет порядка 0,5 [6]. Для установления характера влияния данного параметра при проведении моделирования  $\tan \psi$  варьировался в диапазоне 0,15–0,45.

В рамках численного моделирования были рассмотрены схемы с углом  $2\theta$  от  $60^\circ$  до  $85^\circ$  (рис. 4а, б). Формирование схемы с требуемым углом осуществлялось пошагово.

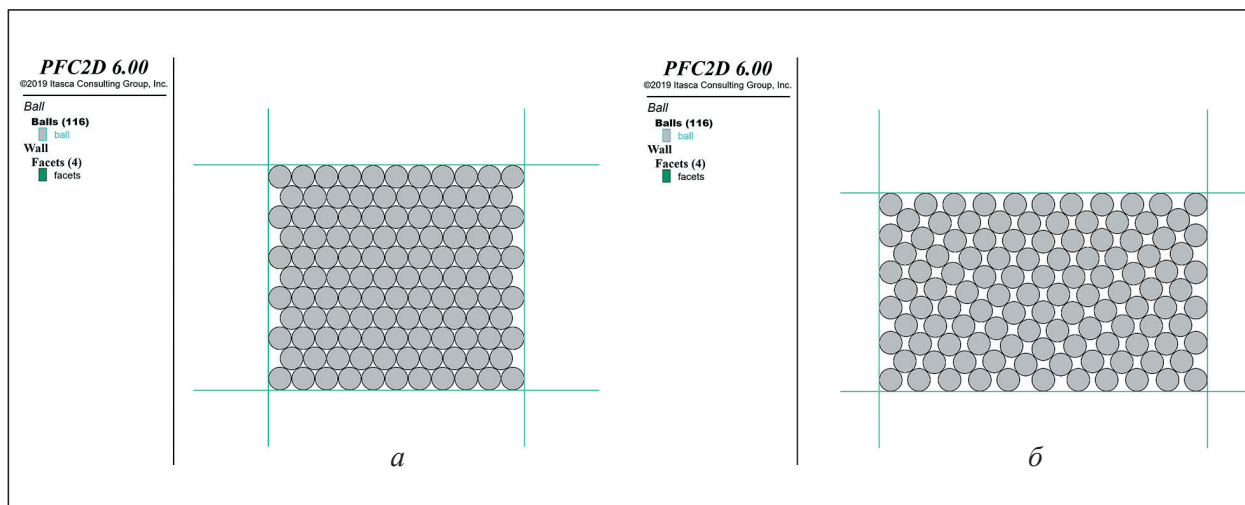


Рис. 4. Расчетные схемы, используемые при численном моделировании: а —  $2\theta = 60^\circ$ ; б —  $2\theta = 85^\circ$

Сначала создавалась гексагональная укладка частиц, затем боковые стенки медленно раздвигались, а на верхней границе поддерживалось небольшое усилие, необходимое для расклинивания частиц и увеличения угла  $2\theta$ . Данный алгоритм позволяет получить достаточно однородную с точки зрения геометрии и напряженно-деформированного состояния схему. Максимальный угол, для которого удалось подготовить расчетную схему, составил  $85^\circ$ . Добиться большего угла оказалось невозможно: формируемый массив частиц терял устойчивость. После формирования расчетной схемы осуществлялось нагружение образца по верхней и нижней границам при отсутствии перемещений по боковым границам, что соответствует периодическим граничным условиям. Целевая величина нагрузки, при которой определялось значение, составляла 200 кПа. После ее достижения на основе встроенного алгоритма осреднения, использующего зависимость Лява и иные алгоритмы [8, 10], вычислялись горизонтальное  $\sigma_{11} = \sigma_x$  и вертикальное  $\sigma_{22} = \sigma_y$  напряжение и коэффициент  $K_0$ .

Ниже приведены графики зависимости коэффициента бокового давления от  $2\theta$  при различных  $\tan\psi$ . Из рисунка видно, что в целом результаты численного моделирования хорошо совпадают с прогнозом по формуле (8). Однако при величине угла более  $78^\circ$  наблюдается нарастающее расхождение между теорией и поставленным экспериментом. В этом диапазоне наблюдается резкий рост коэффициента бокового давления. Следует отметить, что углу  $2\theta = 78^\circ$  соответствует пористость  $\tilde{n} = 0,195$ . По результатам моделирования произвольной укладки монодисперсной среды установлено, что эта величина является предельной, при которой в формируемой системе не возникают значительные начальные напряжения. Таким образом, для хаотической укладки монодис-

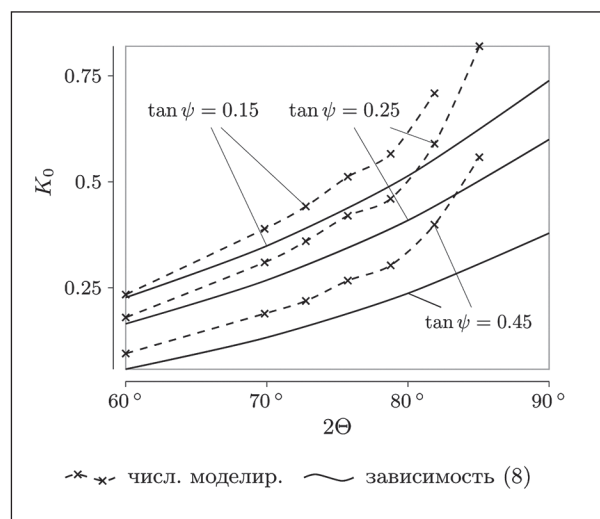
персной среды безраспорной является укладка с высокой пористостью. В то же время, как показало численное моделирование, при высоких значениях пористости механизм формирования бокового давления резко отличается от теоретического, что требуется учитывать при построении моделей грунтов (рис. 5).

По результатам моделирования отмечена однозначная зависимость коэффициента бокового давления от плотности его сложения.

Интересно проследить, насколько данная зависимость коррелирует с результатами натурного моделирования. Для песков ввиду их хаотического сложения угол, аналогичный углу  $2\theta$ , ввести не представляется возможным. Теоретически наиболее обосновано использование такой относительной величины, как степени плотности сложения:

$$I_D = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}}, \quad (9)$$

где  $e_{min}$ ,  $e_{max}$  и  $e$  — коэффициенты пористости песка в максимально возможном плотном,



**Рис. 5.** Коэффициент бокового давления по результатам численного моделирования и на основании аналитического решения

рыхлом и естественном состояниях соответственно.

В работе [11] приведены результаты моделирования  $K_0$  для песков средней крупности на центрифуге. Различными способами отсыпки моделировалась различная плотность, описываемая эмпирической зависимостью:

$$K_0 = 0,129 I_D + 0,331. \quad (10)$$

Сравнение с лабораторными экспериментами по определению  $K_0$  показывает существенное отличие (рис. 6). Так, рассматриваемая упрощенная модель (зависимость (8)) прогнозирует большее значение  $K_0$  для рыхлого, чем для плотного. Величина трения между частицами в зависимости (8) принята равной как для кварца — минеральной частицы песка  $\tan \psi = 0,45$  [7].

Выполненное сравнение показывает, что механизмы формирования бокового давления в реальном грунте существенно отличаются от модели, основанной на представлении грунта как монодисперсной среды с периодической укладкой частиц.

### Список источников

1. Слоэн Н. Дж. А. Упаковка шаров // В мире науки. 1984. № 3. С. 72–82.
2. Love A. E. H. A Treatise of Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: University Press, 1927.
3. Cundall P. A., Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies // Geotechnique. 1979. No. 29 (1). Pp. 47–65.
4. Kruyt N. P. Statics and Kinematics of Discrete Cosserat-type Granular Materials // International Journal of Solids and Structures. 2003. No. 40 (3). Pp. 511–534.
5. Дидух Б. И. Уругопластическое деформирование грунтов. М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1987. 166 с.
6. Mindlin R. D., Deresiewicz H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces // Journal of Applied Mechanics. 1953. No. 20 (3). Pp. 327–344.
7. Трение как фактор, определяющий излучательную эффективность подвижек по разломам и возможность их инициирования. Состояние вопроса / Г. Г. Кочарян [и др.] // Физика Земли. 2023. № 3. С. 3–32. DOI: 10.31857/S0002333723030067.

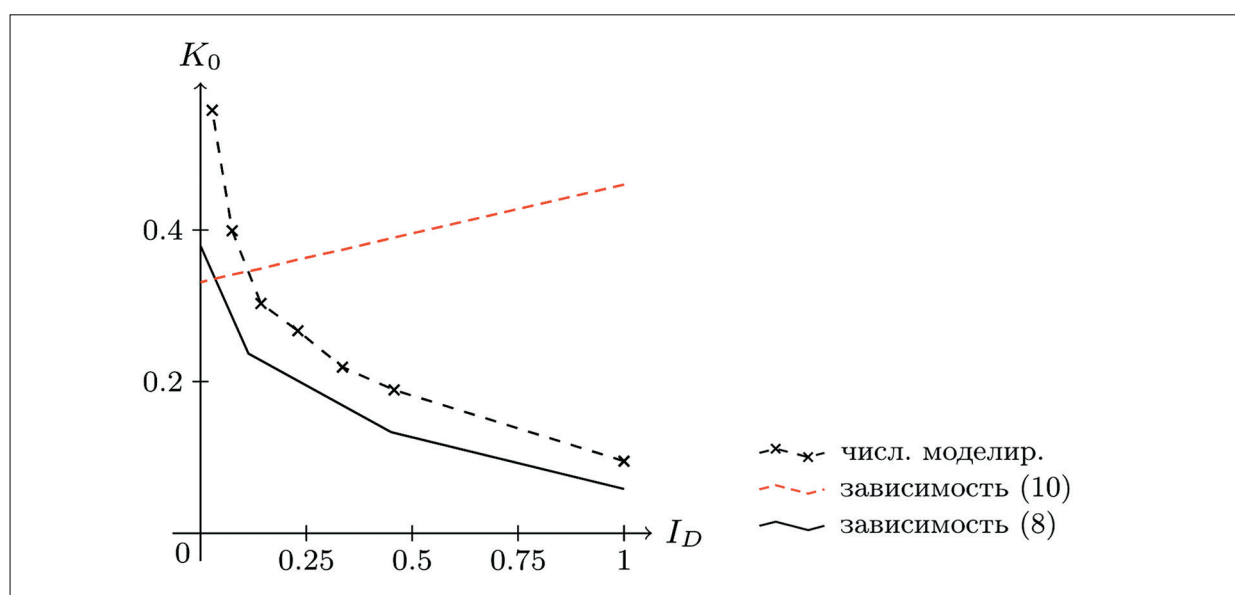


Рис. 6. Сравнение величин коэффициента бокового давления

8. Kruyt N.P., Rothenburg, L. Micromechanical Definition of the Strain Tensor for Granular Materials // Journal of Applied Mechanics (Transactions of the ASME). 1996. No. 63 (3). Pp. 706–711.
9. Li X., Li X. S. Micro-Macro Quantification of the Internal Structure of Granular Materials // J. Eng. Mech. 2009. No. 135. Pp. 641–656.
10. ГОСТ 25100-2020. Грунты. Классификация.
11. Experimental Study on the Coefficient of Earth Pressure at Rest for Sand / L. Li [et al.] // Buildings. 2023. No. 13. 1276 p. DOI: 10.3390/buildings13051276.
12. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. М.: Высш. шк., 1991. 447 с.
- Дата поступления: 24.12.2025  
Решение о публикации: 04.02.2026
- Контактная информация:**  
СЛИВЕЦ Константин Владимирович — канд. техн. наук, доцент; soiltech@yandex.ru  
КРАВЧЕНКО Павел Александрович — канд. техн. наук, доцент; pasha.sky@gmail.com

## Mechanisms for generating lateral earth pressure at rest based on a simplified discrete sand model

**K. V. Slivetz, P. A. Kravchenko**

Emperor Alexander I Petersburg State Transport University, 9 Moskovsky pr., Saint Petersburg, 190031, Russia

**For citation:** *Slivetz K. V., Kravchenko P. A. Mechanisms for generating lateral earth pressure at rest based on a simplified discrete sand model // Proceedings of Petersburg State Transport University, 2026. Vol. 23, iss. 1. Pp. 146–153. DOI: 10.20295/1815-588X-2026-1-146-153. (In Russian)*

### Abstract

**Objective:** to investigate the mechanisms governing the coefficient of earth pressure at rest,  $K_0$ , at the level of soil elementary structure, i.e., its microstructure. The fundamental components of soil microstructure are solid-phase particles. The study focused on a discrete medium represented by clean medium-sized quartz sand. **Methods:** this paper considers an idealized monodisperse medium with periodic grain packing, i.e., a discrete medium composed of particles identical in size and shape and arranged in a regular pattern. Apparently, this type of medium is a major simplification, as natural soils consist of grains of varied sizes, which may differ by several orders of magnitude. Modelling that accounts for the actual particle-size distribution significantly complicates the research process. At the same time, only monodisperse granular assemblies allow the limiting states of packing densities to be identified without ambiguity and make it possible to derive analytical expressions for the coefficient of lateral earth pressure. For this reason, this study reviews and summarizes available theoretical approaches developed for evaluating this coefficient in media of that type. In the numerical simulations, the granular media was described within the framework of discrete media mechanics. Under this approach, an elementary soil volume is treated as a mechanical system composed of a finite number of interacting grains, governed by the fundamental laws of dynamics. Numerical modelling of the medium during the formation of  $K_0$  was simulated using the discrete element method. **Results:** the results indicate that the available theoretical relationships remain valid only within a limited range of porosity and packing density. When porosity approaches its limiting value, the coefficient of lateral earth pressure rises sharply relative to the values of the theoretical predictions. A comparison with laboratory measurements of  $K_0$  reveals a substantial discrepancy between the simplified model and experimental evidence. In particular, the model suggests that loose sand should exhibit a greater  $K_0$  than densely packed sand, whereas laboratory experiments demonstrate the reverse relationship. **Practical**

**significance:** the results of this study have theoretical significance for soil mechanics. By interpreting the development of the lateral earth pressure coefficient through the principles of discrete media mechanics the study makes it possible to examine, in detail, how each characteristic of the granular system contributes to the emergence of  $K_0$ .

**Keywords:** granular media, sand, coefficient, friction, sand microstructure, modelling

## References

1. Sloen N. Dzh. A. Upakovka sharov // *V mire nauki*. 1984. No. 3. S. 72–82. (In Russian)
2. Love A. E. H. *A Treatise of Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: University Press, 1927.
3. Cundall P. A., Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies // *Geotechnique*. 1979. No. 29 (1). Pp. 47–65.
4. Kruyt N. P. Statics and Kinematics of Discrete Cosserat-type Granular Materials // *International Journal of Solids and Structures*. 2003. No. 40 (3). Pp. 511–534.
5. Didukh B. I. *Uprugoplasticheskoe deformirovanie gruntov*. M.: Izd-vo Un-ta druzhby narodov, 1987. 166 s. (In Russian)
6. Mindlin R. D., Deresiewicz H. Elastic Spheres in Contact Under Varying Oblique Forces // *Journal of Applied Mechanics*. 1953. No. 20 (3). Pp. 327–344.
7. Trenie kak faktor, opredelyayushchij izluchatel'nyuyu effektivnost' podvizhek po razlomam i vozmozhnost' ikh initsirovaniya. Sostoyanie voprosa / G. G. Kocharyan [i dr.] // *Fizika Zemli*. 2023. No. 3. S. 3–32. DOI: 10.31857/S0002333723030067. (In Russian)
8. Kruyt N. P., Rothenburg, L. Micromechanical Definition of the Strain Tensor for Granular Materials // *Journal of Applied Mechanics (Transactions of the ASME)*. 1996. No. 63 (3). Pp. 706–711.
9. Li X., Li X. S. Micro-Macro Quantification of the Internal Structure of Granular Materials // *J. Eng. Mech.* 2009. No. 135. Pp. 641–656.
10. GOST 25100-2020. Grunty. Klassifikatsiya. (In Russian)
11. Experimental Study on the Coefficient of Earth Pressure at Rest for Sand / L. Li [et al.] // *Buildings*. 2023. No. 13. 1276 p. DOI: 10.3390/buildings13051276.
12. Ivanov P. L. *Grunty i osnovaniya gidrotekhnicheskikh sooruzhenij*. M.: Vyssh. shk., 1991. 447 s. (In Russian)

Received: 24.12.2025

Accepted: 04.02.2026

## Author's information:

Konstantine V. SLIVETZ — PhD in Engineering, Associate Professor; soiltech@yandex.ru

Pavel A. KRAVCHENKO — PhD in Engineering, Associate Professor; pasha.sky@gmail.com