

ПРОБЛЕМАТИКА ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ

УДК 629.4.053

Сопоставительная оценка численного интегрирования уравнения движения электропоезда для автоведения

О. С. Валинский, А. М. Евстафьев, А. Н. Сычугов, Е. В. Суханов

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Россия, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

Для цитирования: Валинский О. С., Евстафьев А. М., Сычугов А. Н., Суханов Е. В. Сопоставительная оценка численного интегрирования уравнения движения электропоезда для автоведения // Бюллетень результатов научных исследований. 2026. Вып. 3. С. 7–22. DOI: 10.20295/2223-9987-2026-3-7-22

Аннотация

Цель: сопоставительная оценка вариантов численного интегрирования уравнения продольного движения электропоезда и выявление рациональных сочетаний метода и шага для вычислительного ядра системы автоведения по критериям точности и продолжительности вычислений. **Методы:** рассмотрено интегрирование уравнения продольного движения по времени, скорости и пути с применением отдельных наборов численных методов. При интегрировании по пути дополнительно исследовано энергетическое преобразование уравнения. Для рассматриваемых методов выполнено сопоставительное моделирование режима разгона на четырех вариантах продольного профиля. Точность оценивалась по абсолютным отклонениям конечных значений пути и времени от результатов опорного расчета. Методом Дерринджера — Сьюича сформирован комплексный показатель, учитывающий точность и продолжительность вычислений. **Результаты:** выбор метода интегрирования для вычислительного ядра системы автоведения должен учитывать независимую переменную и величину шага. Расчет по скорости обеспечивает высокое быстродействие на участках ее монотонного изменения, но осложняется при поддержании скорости. Интегрирование по времени удобно, когда необходимо выдержать продолжительность отдельных режимов ведения. Поскольку в обоих вариантах путь является зависимой величиной, изменения уклона, ограничений скорости и управляющих команд, связанных с определенными координатами, могут оказаться внутри шага и должны учитываться отдельно. При расчете по пути координаты этих изменений сразу используются как границы шагов. Для явных методов второго порядка с параметризацией по пути выявлена широкая область значений шага с высоким комплексным показателем по совокупности рассмотренных профилей. **Практическая значимость:** результаты дают возможность выбирать математическую основу вычислительного ядра системы автоведения с учетом требуемого соотношения точности и быстродействия, особенностей исходных зависимостей и области применимости каждого метода.

Ключевые слова: электропоезд, система автоведения, продольное движение, численное интегрирование, метод Дерринджера — Сьюича

Введение

Одним из подходов к построению системы автоведения является формирование управляющих воздействий с помощью предварительного моделирования движения на рассматриваемом участке. В результате определяются зависимости скорости, времени, тяговых и тормозных усилий от пройденного пути. Такое

представление дает возможность учесть продольный профиль и ограничения скорости, связать управление с координатой, определить время движения и расход энергии, а также проверить соблюдение графика [1–3]. В процессе движения расчеты выполняются многократно, поэтому важна их продолжительность.

Наряду с быстроедействием предъявляются повышенные требования к точности. Если численная погрешность сопоставима с возможным отклонением фактического движения от расчетного, то становится сложно различить причины расхождения. Погрешность пути смещает координаты управления, а погрешность времени отражается на соблюдении графика и доступном резерве.

Порядок аппроксимации, устойчивость и вычислительные затраты характеризуют численные методы [4–7], но сами по себе не определяют их пригодность для рассматриваемой модели. Одни зависимости изменяются со скоростью, другие связаны с пройденным путем. Выбор независимой переменной определяет, как изменения этих зависимостей учитываются внутри расчетного шага, и тем самым влияет на возникающую погрешность.

Одно уравнение движения можно преобразовать для численного интегрирования по времени, скорости или пути. У каждого варианта есть свои преимущества и ограничения. Особую роль играют точки изменения кусочно-постоянных условий движения. Если такая точка находится внутри шага, функция ускорения на рассматриваемом интервале не является гладкой и повышение формального порядка метода не обязательно уменьшает ошибку. Более мелкий шаг обычно повышает точность, но одновременно увеличивает продолжительность вычислений.

Цель работы состоит в сопоставительной оценке вариантов численного интегрирования уравнения продольного движения электропоезда и выявлении рациональных сочетаний метода и шага для вычислительного ядра системы автоведения по критериям точности и продолжительности вычислений. Для достижения цели рассматриваются математические особенности интегрирования по времени, скорости и пути, выполняется сопоставительное моделирование на нескольких продольных профилях и применяется многокритериальная оценка результатов.

Математические основания выбора метода интегрирования

Продольное движение электропоезда описывается дифференциальным уравнением первого порядка, полученным из баланса силы тяги и сил сопротивления движению. В рассматриваемой постановке учитываются основное сопротивление движению поезда, зависящее от скорости, и дополнительное сопротивление от уклона, зависящее от координаты пути. Учет других составляющих дополнительного сопротивления изменил бы значения действующих сил, но не различия вариантов интегрирования.

Уравнение движения имеет вид:

$$m(1 + \gamma) \frac{dv}{dt} = F_k(v) - W_0(v) - W_i(s),$$

где m — масса поезда;

γ — коэффициент инерции вращающихся масс;

v — скорость;

t — время;

s — путь;

$F_k(v)$ — сила тяги;

$W_0(v)$ — основное сопротивление движению поезда;

$W_i(s)$ — дополнительное сопротивление от уклона.

Ускорение представим в виде:

$$a(v, s) = \frac{F_k(v) - W_0(v) - W_i(s)}{m(1 + \gamma)}.$$

Выбор времени, скорости или пути в качестве независимой переменной определяет преобразование уравнения и последовательность обновления расчетных величин.

Интегрирование по времени

При выборе времени в качестве независимой переменной уравнение движения дополняется кинематическим соотношением для определения приращения скорости и пройденного пути:

$$\frac{dv}{dt} = a(v, s), \quad \frac{ds}{dt} = v.$$

Простейший переход явного метода Эйлера имеет вид:

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t, \quad s_{n+1} = s_n + v_n \Delta t, \quad a_n = a(v_n, s_n),$$

где n — номер узла;

a_n — ускорение в начале шага;

Δt — шаг по времени.

Интегрирование по времени не требует монотонного изменения скорости, применимо при различных режимах движения и удобно для выдерживания продолжительности действия команд управления.

Основная трудность связана с условиями, привязанными к пути. Если внутри шага изменяется уклон, ограничение скорости или управляющее воздействие, расчет с прежними условиями вносит дополнительную погрешность. Для ее снижения шаг сокращают до точки изменения, что увеличивает число вычислений.

Интегрирование по скорости

На участке монотонного изменения скорости с ненулевым ускорением:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{a(v, s)}, \quad \frac{ds}{dv} = \frac{v}{a(v, s)}.$$

Переход методом Эйлера по приращению скорости записывается как:

$$t_{n+1} = t_n + \frac{\Delta v}{a_n}, \quad s_{n+1} = s_n + \frac{v_n \Delta v}{a_n},$$

где Δv — шаг по скорости.

При интегрировании по скорости последовательность значений независимой переменной известна до начала расчета. В пределах фрагмента с неизменным уклоном это позволяет вычислять подынтегральные функции для массива скоростей и векторизовать однородные операции [8].

При уменьшении модуля ускорения производные времени и пути по скорости возрастают, а при поддержании постоянной скорости независимая переменная не получает приращения, поэтому расчет необходимо продолжить по времени или пути. При смене направления изменения скорости расчет разделяется на монотонные участки. Точки изменения условий, привязанных к пути, обнаруживаются после вычисления приращения пути и требуют уточнения шага.

При расчете могут использоваться квадратурные методы:

$$\Delta t = \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{dv}{a(v, s)}, \quad \Delta s = \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{v dv}{a(v, s)}.$$

Помимо прочего, приращения времени и пути могут определяться аналитическим решением локально линеаризованного уравнения. На малом интервале разность силы тяги и сил сопротивления движению представляется линейной функцией приращения скорости:

$$m(1 + \gamma) \frac{d\Delta v}{dt} = k_1 - k_2 \Delta v,$$

где $\Delta v = v - v_n$ — приращение скорости относительно начала интервала;

k_1 — разность силы тяги и сил сопротивления в начале интервала;

k_2 — коэффициент локальной линейной аппроксимации.

При постоянных на интервале коэффициентах вводятся постоянная времени и предельное приращение скорости:

$$T = \frac{m(1 + \gamma)}{k_2}, \quad \Delta v_\infty = \frac{k_1}{k_2}.$$

Время достижения выбранного приращения скорости определяется выражением:

$$\Delta t = -T \ln \left(1 - \frac{\Delta v}{\Delta v_{\infty}} \right). \quad (1)$$

Пройденный за это время путь равен:

$$\Delta s = v_n \Delta t + \Delta v_{\infty} \left[\Delta t - T \left(1 - e^{-\Delta t/T} \right) \right]. \quad (2)$$

При $k_2 \rightarrow 0$ применяется предельное решение для постоянного ускорения. Формулы (1) и (2) являются точными только для локально линеаризованного уравнения. Их отклонение от исходной нелинейной модели определяется погрешностью аппроксимации и учетом изменений условий, привязанных к пути. Уменьшение шага уменьшает погрешность, но увеличивает число вычислений. Замкнутая форма возникает вследствие принятой линеаризации, а к интегрированию по скорости алгоритм относится по способу формирования последовательных интервалов.

Интегрирование по пути

При выборе пути в качестве независимой переменной кинематическая связь скорости с пройденным путем приводит к системе:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{a(v, s)}{v}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}.$$

Простейший переход явного метода Эйлера имеет вид:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{a_n}{v_n} \Delta s, \quad t_{n+1} = t_n + \frac{\Delta s}{v_n},$$

где Δs — шаг по пути.

Положение каждого расчетного узла в этом случае изначально известно. Координаты начала и конца фрагментов продольного профиля, ограничений скорости и управляющих воздействий можно включить в последовательность узлов до начала вычислений. Тогда изменение условий совпадает с границей шага и не требует определения точки пересечения.

Производная скорости для интегрирования по пути содержит обратную скорость, что осложняет расчет в области начала движения. Для более устойчивого описания вводится энергетическое преобразование, дифференцирование которого дает:

$$z = \frac{v^2}{2}, \quad \frac{dz}{ds} = a(\sqrt{2z}, s), \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2z}}.$$

Переменная z пропорциональна удельной кинетической энергии и изменяется в соответствии с работой разности силы тяги и сил сопротивления движению на единице массы. Преобразование снижает численную чувствительность при малых скоростях, не изменяя физическую модель. Однако итоговое время остается чувствительным к погрешности скорости на начальном участке.

Вычислительные затраты численных методов

Вычислительные затраты зависят от выбранного численного метода. Для методов Рунге — Кутты они определяются числом стадий, а для неявных вариантов также средним числом итераций [6, 7]. При интегрировании по скорости затраты квадратурных и локальных аналитических алгоритмов зависят от числа вычислений ускорения и состава математических операций. Общие затраты определяются трудоемкостью одного шага и числом шагов на расчетном интервале.

При постоянном шаге число переходов N приближенно определяется длиной L интервала независимой переменной и шагом h . При условно постоянной трудоемкости вычисления ускорения оценки затрат имеют вид:

$$C_{\text{exp}} = O(Nq), \quad C_{\text{imp}} = O(NqI), \quad N \approx \frac{L}{h},$$

где q — число стадий;

I — число итераций неявного метода;

$C_{\text{exp}}, C_{\text{imp}}$ — оценки затрат явного и неявного методов.

В укрупненной асимптотической оценке арифметические операции, возведение в квадрат, вычисление логарифма, экспоненты и квадратного корня при фиксированной разрядности имеют постоянную стоимость $O(1)$. Фактическая продолжительность этих операций различается и входит в постоянные множители. Подсчет отдельных операций уточняет асимптотическую оценку, но охватывает главным образом вычисления, непосредственно определяемые формулами метода.

На продолжительность расчета влияют и сопутствующие действия: интерполяция; проверка достижения координат, в которых меняются условия движения; внутренние итерации и условные переходы. Их состав зависит от независимой переменной. При расчете по пути координаты изменения условий могут совпадать с границами шагов. При расчете по времени или скорости пересечение такой координаты необходимо сначала обнаружить. При этом часть вычислений по скорости можно выполнять над массивами, тогда как переходы по времени и пути преимущественно выполняются последовательно. По этой причине число математических операций не дает полной оценки продолжительности расчета.

Фактическая продолжительность вычислений измерялась для каждой реализованной комбинации метода и шага на одной платформе. В измерение входили вычисления по формулам метода и предусмотренная программой обработка условий движения. Полученные значения характеризуют принятую реализацию и не могут считаться универсальными, однако позволяют сопоставить рассматриваемые варианты в одинаковых условиях. Совместный учет погрешности и времени применяется и при прикладном сравнении численных методов [5].

Методика моделирования и многокритериальной оценки

Исследовался разгон электропоезда с асинхронным тяговым приводом и массой 650 т до 250 км/ч при полном тяговом усилии. Для расчетов были выбраны четыре кусочно-постоянных продольных профиля: площадка, подъем и спуск, два варианта с противоположным порядком чередования подъемов и спусков. Характеристики поезда во всех расчетах оставались неизменными, что обеспечило сопоставление интегрирования по времени, скорости и пути применительно к одному физическому процессу. При интегрировании по скорости взяты 12 значений шага от 0,05 до 10 км/ч, по пути 21 — от 0,05 до 500 м, по времени 14 — от 0,05 до 20 с.

При интегрировании по скорости сопоставлены методы левых и правых прямоугольников, средней точки, трапеций, обычный и адаптивный методы Симпсона, формулы Гаусса — Лежандра с двумя и тремя узлами и три локально-аналитических варианта. При интегрировании по пути использованы явные методы Эйлера, средней точки, Хойна, Ралстона, Рунге — Кутты третьего и четвертого порядков и трехстадийный метод Рунге — Кутты третьего порядка с сохранением монотонности SSPRK3, или метод Шу — Ошера. Среди неявных методов рассмотрены методы Кранка — Николсона, Гаусса — Лежандра и двухстадийный диагонально неявный метод Рунге — Кутты второго порядка SDIRK2. Для применимых методов сопоставлены непосредственное интегрирование скорости и энергетическое преобразование. При интегрировании по времени использованы явные и неявные методы Эйлера и средней точки, метод Хойна, метод Кранка — Николсона и методы Рунге — Кутты третьего и четвертого порядков.

Первый формальный порядок имеют методы Эйлера и прямоугольников, второй — методы средней точки, трапеций, Хойна, Ралстона, Кранка — Николсона и SDIRK2, третий — методы Рунге — Кутты третьего порядка и SSPRK3, четвертый — классический метод Рунге — Кутты и двухузловая формула Гаусса — Лежандра. Для гладкой подынтегральной функции формула Симпсона также имеет четвертый порядок, а трехузловая формула Гаусса — Лежандра — шестой [6, 7].

Указанные порядки справедливы для гладких зависимостей и точного вычисления промежуточных стадий. Переходы между фрагментами профиля и интерполяция ускорения во внутренних узлах квадратур нарушают эти условия, поэтому формальный порядок непосредственно не определяет фактическую погрешность. Для локальных аналитических вариантов единый порядок не назначался, поскольку их точность зависит от локальной аппроксимации разности сил.

Способ учета изменения уклона зависел от выбранной независимой переменной. При интегрировании по пути координаты переходов между фрагментами профиля использовались как границы шагов. В расчете по скорости и времени переход на следующий фрагмент профиля определялся по накопленному пути, где значения в соответствующей координате затем уточнялись линейной интерполяцией.

Завершение расчета во всех вариантах соответствовало одной конечной скорости. Если шаг по времени или пути пересекал это значение, то использовалась только необходимая часть шага. Приращения времени и пути для этой части определялись по кинематической зависимости с ускорением в начале шага. В расчете по скорости конечные значения пути и времени уточнялись линейной интерполяцией на последнем интервале. Таким образом, для всех вариантов сохранялось одинаковое условие завершения, но решение на последнем шаге оставалось приближенным.

Опорный расчет выполнялся локальным аналитическим методом при интегрировании по скорости с шагом 0,001 км/ч. Это значение в 50 раз меньше минимального скоростного шага, включенного в основное сопоставление. Опорный расчет не является аналитическим решением полной нелинейной модели, однако малое приращение и замкнутое решение локально линеаризованного уравнения позволяют использовать его как единую основу сравнения.

Для каждого сочетания метода и шага определялись отклонения конечных значений пути и времени:

$$\Delta S = |S - S_{\text{ref}}|, \quad \Delta T = |T - T_{\text{ref}}|,$$

где S, T — конечные путь и время исследуемого варианта;

$S_{\text{ref}}, T_{\text{ref}}$ — конечные путь и время опорного расчета.

Для сопоставления профилей использовались относительные ошибки:

$$\varepsilon_S = 100 \frac{\Delta S}{S_{\text{ref}}}, \quad \varepsilon_T = 100 \frac{\Delta T}{T_{\text{ref}}}.$$

Конечные ошибки передают накопленный результат при достижении заданной скорости, но не максимальное расхождение внутри участка, поскольку локальные отклонения могут частично компенсироваться.

Продолжительность вычислений измерялась на одной программно-аппаратной платформе. Расчеты выполнены в Python с использованием библиотеки NumPy [8]. Полученные значения предназначены для относительного сопоставления реализованных методов и непосредственно не переносятся на другие программно-аппаратные условия.

Для совместного учета двух ошибок и продолжительности вычислений применен метод Дерринджера — Сьюича [9]. Для каждого показателя, подлежащего минимизации, вводилась безразмерная частная оценка:

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_1, \\ \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right)^\mu, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & x \geq x_2, \end{cases}$$

где x — оцениваемое значение;

μ — параметр крутизны перехода;

x_1, x_2 — границы безусловно приемлемой и неприемлемой области.

Приняты параметры крутизны $\mu_S = 1,9$, $\mu_T = 2,5$ и $\mu_\tau = 5,5$.

Для относительных ошибок пути и времени границы x_1 и x_2 субъективно установлены равными соответственно 0,04 и 0,08 %. Для продолжительности вычислений границы определялись внутри общего диапазона измеренных значений:

$$\tau_1 = \tau_{\min} + 0,02(\tau_{\max} - \tau_{\min}), \quad \tau_2 = \tau_{\min} + 0,08(\tau_{\max} - \tau_{\min}),$$

где $\tau_{\min}$, $\tau_{\max}$ — минимальная и максимальная продолжительности;

τ_1, τ_2 — границы приемлемой и неприемлемой продолжительности.

Комплексный показатель для одного профиля вычислялся как взвешенное геометрическое среднее [10]:

$$D = \left(d_S^{w_S} d_T^{w_T} d_\tau^{w_\tau} \right)^{1/(w_S + w_T + w_\tau)},$$

где d_S, d_T, d_τ — частные оценки ошибки пути, времени и длительности;

w_S, w_T, w_τ — веса частных оценок.

Геометрическое среднее не допускает компенсации полностью неприемлемого значения. Параметры и веса отражают принятое соотношение требований и не являются универсальными. Веса ошибок пути, времени и продолжительности вычислений приняты равными 3, 4,5 и 2 соответственно.

Для каждого сочетания метода и шага комплексные показатели по четырем профилям суммировались:

$$D_\Sigma(M, h) = \sum_{r=0}^3 D(M, h, P_r),$$

где M — исследуемый метод;

h — шаг интегрирования;

P_r — вариант профиля;

D_Σ — суммарный комплексный показатель по четырем профилям.

Максимально возможное значение оценки равно 4 и достигается, если все частные показатели находятся в безусловно приемлемой области на каждом профиле. Суммарный показатель не устанавливает обязательного ранга методов, а выявляет сочетания, сохраняющие принятый уровень точности и быстродействия при изменении продольного профиля.

Сопоставительное моделирование

Для каждого сочетания независимой переменной, метода, шага и профиля выполнена серия последовательных расчетов. Продолжительность вычислений определялась как их суммарное время, что уменьшало относительное влияние

случайных колебаний и обеспечивало сопоставимость вариантов. Полученные ошибки конечных значений пути и времени, а также продолжительность вычислений первоначально представлены в виде трехсекторных тепловых карт. По горизонтали расположены исследуемые методы, по вертикали указаны значения шага соответствующей независимой переменной. Каждая ячейка характеризует одно сочетание метода и шага. Левый сектор содержит абсолютную ошибку пути в метрах. В верхнем секторе приведена абсолютная ошибка времени в секундах, а в нижнем правом — суммарная продолжительность вычислений в миллисекундах. Зеленый цвет соответствует безусловно приемлемой области, желтый обозначает переходную область, красный соответствует неприемлемой области. На рис. 1 приведен пример такой карты для интегрирования по пути на одном продольном профиле. Он показывает форму представления исходных результатов, на основе которых далее рассчитывался комплексный показатель. Аналогичные карты сформированы для остальных вариантов.

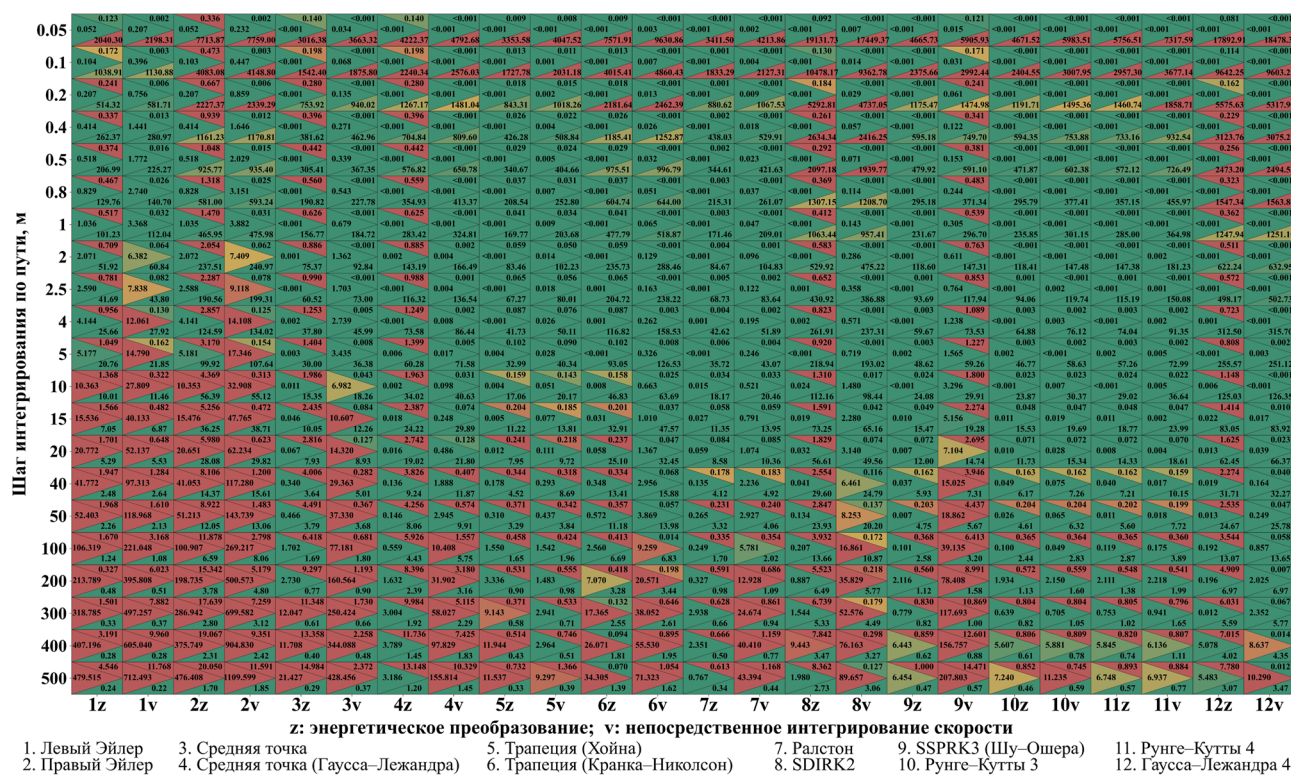


Рис. 1. Пример представления ошибок пути, времени и продолжительности вычислений при интегрировании по пути для одного профиля

Подробная карта сохраняет перегруженные, поэтому дальнейшее сопоставление чисел вариантов становится перегруженным, поэтому дальнейшее сопоставление выполняется по суммарному комплексному показателю. В последующих картах строки соответствуют методам, а столбцы — шагам. Значение 4 соответствует

безусловно приемлемой области для всех частных показателей на каждом профиле, а меньшие значения отражают ухудшение результатов или их физическую недопустимость.

На рис. 2 представлен показатель при интегрировании по скорости.



Рис. 2. Суммарный комплексный показатель сочетаний метода и шага при интегрировании по скорости

При интегрировании по скорости большинство квадратурных и локальных аналитических методов достигают максимального комплексного показателя при шагах от 0,1 до 1 км/ч. С уменьшением шага различия между методами среднего и высокого порядка сокращаются, поскольку погрешность определяется также локальной аппроксимацией ускорения. Немонотонные изменения показателя связаны с совпадением расчетных узлов с точками изменения профиля или конечной скоростью и компенсацией локальных отклонений.

На рис. 3 представлен показатель при интегрировании по пути.

При интегрировании по пути явные методы второго, третьего и четвертого порядков образуют широкую область высоких значений показателя при шагах от единиц до десятков метров. Наиболее стабильными оказались методы Ралстона, средней точки, Хойна, SSPRK3 и Рунге — Кутты, а перекрытие их приемлемых областей позволяет выбирать шаг по допустимым вычислительным затратам. Малые шаги увеличивают продолжительность вычислений, крупные приводят к росту ошибок или физически недопустимому результату, а неявные методы из-за внутренних итераций не показали общего преимущества. Энергетическое преобразование устраняет деление на скорость в уравнении основной переменной, но время остается чувствительным к начальной ошибке скорости. Каждый фрагмент продольного профиля рассчитывался при неизменных условиях, поскольку координаты смены уклона, ограничений и управляющих воздействий использовались как границы шагов.

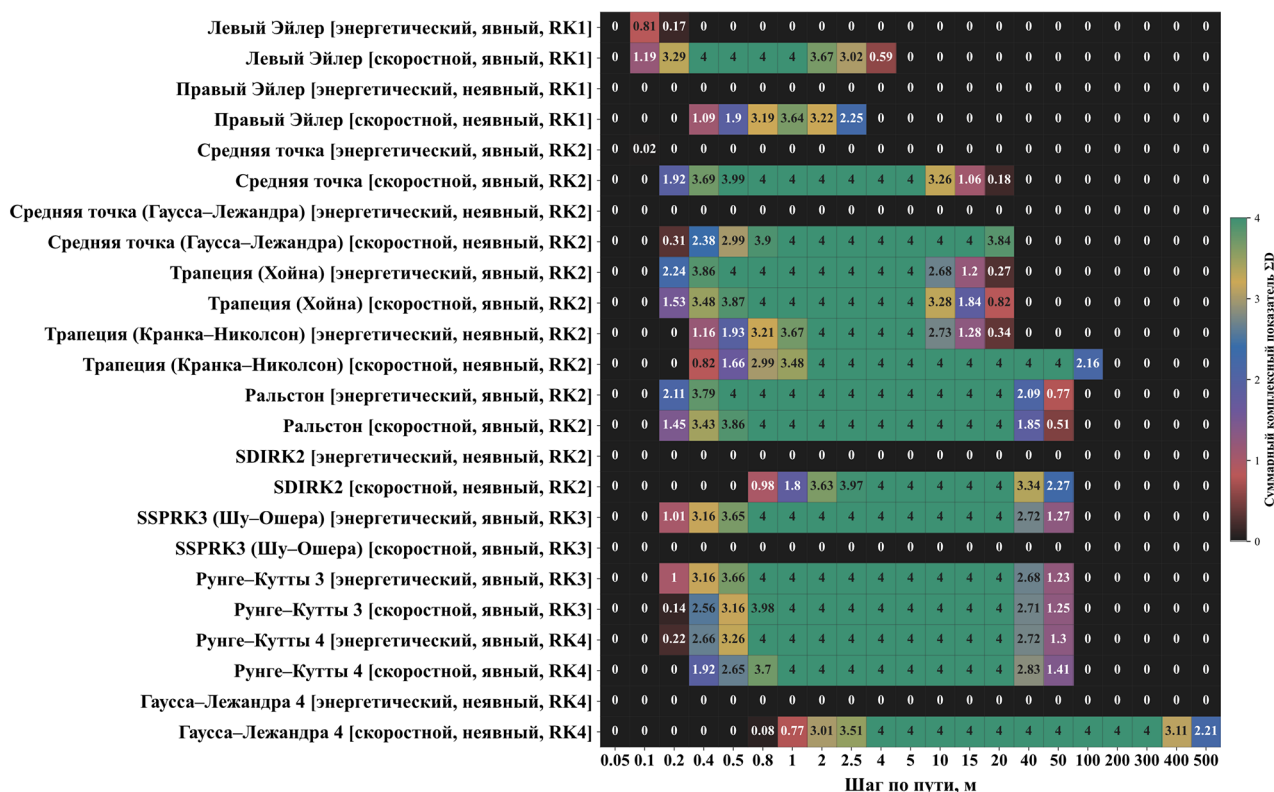


Рис. 3. Суммарный комплексный показатель сочетаний метода и шага при интегрировании по пути

На рис. 4 представлен показатель при интегрировании по времени.

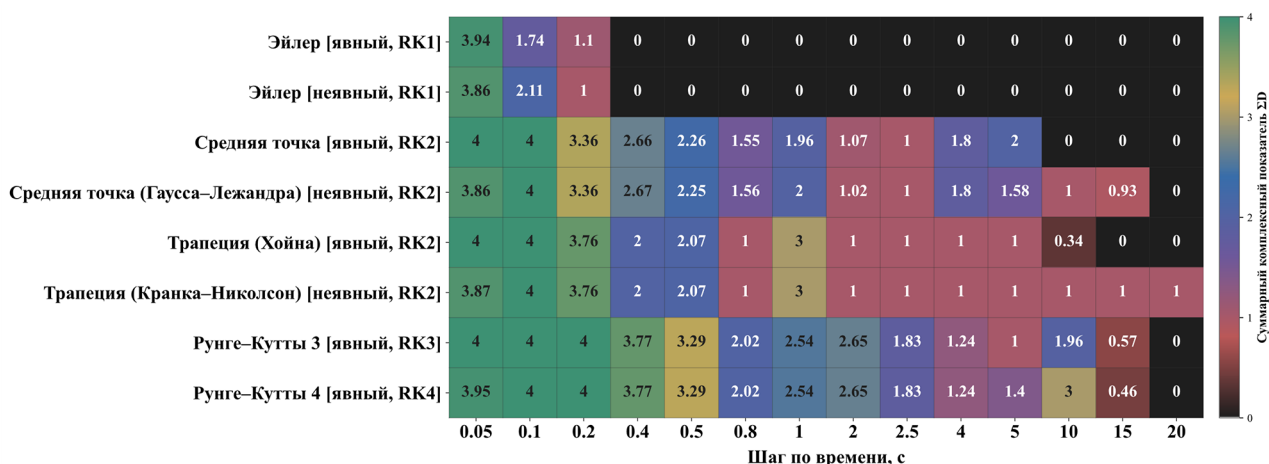


Рис. 4. Суммарный комплексный показатель сочетаний метода и шага при интегрировании по времени

Наибольшие значения комплексного показателя при интегрировании по времени получены для шагов от 0,05 до 0,2 с. Методы Рунге — Кутты высоких порядков сохраняли приемлемые результаты и при отдельных, более крупных шагах. Для

методов Эйлера приемлемым оказался только минимальный шаг. Различия зависели не только от формального порядка, но и от попадания точек изменения условий внутрь расчетного интервала. Интегрирование по времени применимо при различных режимах и удобно для выдерживания продолжительности команд. Условия, связанные с пройденным путем, при этом приходится учитывать отдельно.

Совместный анализ не выявил универсального сочетания независимой переменной, метода и шага. Для каждой независимой переменной сформировался собственный диапазон сочетаний, удовлетворяющих принятым ограничениям. При этом для системы автоведения, в которой профиль, ограничения и команды представлены как функции пути, преимущество имеет интегрирование по пути.

Полученные диапазоны справедливы для исследованного разгона и выбранных показателей. Оценка конечных ошибок не отражает величину отклонений внутри участка, а измеренное время относится к конкретной программной реализации. Эти ограничения сужают интерпретацию чисел, но не изменяют выявленных различий между независимыми переменными.

Заключение

В работе сопоставлены варианты интегрирования уравнения продольного движения электропоезда по времени, скорости и пути. Для каждого варианта одновременно изменялись численный метод и шаг, а оценка учитывала точность и продолжительность вычислений. Расчеты подтвердили, что преимущество более высокого формального порядка зависит от структуры исходных зависимостей и обработки точек изменения условий движения.

Ошибки пути и времени вместе с продолжительностью вычислений были сведены в комплексный показатель методом Дерринджера — Сьюича. Он позволил определить не единственный метод, а совокупность сочетаний, удовлетворяющих установленным требованиям. При интегрировании по пути наиболее широкий диапазон подходящих шагов получен для явных методов второго порядка на всех четырех продольных профилях. Эти сочетания могут рассматриваться как рациональные варианты математической основы вычислительного ядра системы автоведения.

Полученные результаты характеризуют моделирование режима разгона. При построении полного алгоритма движения учет торможения, выбега, поддержания скорости и переключения управляющих усилий может создавать дополнительные ограничения и изменять сравнительные преимущества методов. Поэтому окончательный выбор независимой переменной, метода и шага должен учитывать допустимые погрешности, доступное время пересчета, структуру исходных зависимостей и рассматриваемые условия движения.

Список источников

1. Внедрение системы автоведения для повышения точности управления и энергоэффективности высокоскоростного электропоезда / О. С. Валинский [и др.] // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2025. Т. 22, вып. 1. С. 7–18. DOI: 10.20295/1815-588X-2025-1-7-18
2. Юренко К. И., Фандеев Е. И. Принципы построения и имитационное моделирование систем автоведения электроподвижного состава // Известия ЮФУ. Технические науки. 2016. № 8 (181). С. 88–102. DOI: 10.18522/2311-3103-2016-8-88-102
3. Юренко К. И., Савоськин А. Н., Фандеев Е. И. Математическое моделирование энергооптимальных режимов ведения поезда с учетом возмущений // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2015. № 3 (184). С. 34–44. DOI: 10.17213/0321-2653-2015-3-34-44
4. Абляимов О. С. Уравнение движения поезда и некоторые методы его решения // Universum: технические науки. 2020. № 9 (78). URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/10715> (дата обращения: 23.07.2026).
5. Абляимов О. С. Эффективность решения дифференциальных уравнений вида $y' = f(x, y)$ методом хорд // Universum: технические науки. 2020. № 9 (78). URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/10713> (дата обращения: 23.07.2026).
6. Butcher J. C. Implicit Runge–Kutta Processes // Mathematics of Computation. 1964. Vol. 18, no. 85. Pp. 50–64. DOI: 10.1090/S0025-5718-1964-0159424-9
7. Kennedy C. A., Carpenter M. H. Diagonally Implicit Runge–Kutta Methods for Ordinary Differential Equations: A Review. NASA/TM-2016-219173. Hampton: NASA Langley Research Center, 2016.
8. Array Programming with NumPy / C. R. Harris [et al.] // Nature. 2020. Vol. 585. Pp. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2
9. Derringer G., Suich R. Simultaneous Optimization of Several Response Variables // Journal of Quality Technology. 1980. Vol. 12, no. 4. Pp. 214–219. DOI: 10.1080/00224065.1980.11980968
10. Derringer G. C. A Balancing Act: Optimizing a Product's Properties // Quality Progress. 1994. Vol. 27, no. 6. Pp. 51–58.

Дата поступления: 21.06.2026

Решение о публикации: 11.08.2026

Контактная информация:

ВАЛИНСКИЙ Олег Сергеевич — кандидат техн. наук, профессор; rector@pgups.ru

ЕВСТАФЬЕВ Андрей Михайлович — доктор техн. наук, профессор; evstafev@pgups.ru

СЫЧУГОВ Антон Николаевич — кандидат техн. наук, доцент; sychugov@pgups.ru

СУХАНОВ Евгений Владимирович — аспирант, ассистент; sukhanov.ev.genii@yandex.ru

Comparative Assessment of Numerical Integration of the Equation of Motion of an Electric Train for Automatic Train Operation

O. S. Valinskij, A. M. Evstaf'ev, A. N. Sychugov, E. V. Sukhanov

Emperor Alexander I Petersburg State Transport University, 9 Moskovsky ave., St. Petersburg, 190031, Russia

For citation: Valinskij O. S., Evstaf'ev A. M., Sychugov A. N., Sukhanov E. V. Comparative Assessment of Numerical Integration of the Equation of Motion of an Electric Train for Automatic Train Operation // Bulletin of Scientific Research Results, 2026, iss. 3, pp. 7–22. DOI: 10.20295/2223-9987-2026-3-7-22 (In Russian)

Abstract

Objective: comparative assessment of variants of numerical integration of the longitudinal equation of motion of an electric train and identification of rational combinations of method and step size for the computational core of an automatic train operation system according to the criteria of accuracy and computation time. **Methods:** integration of the longitudinal equation of motion with respect to time, speed and distance was considered using separate sets of numerical methods. For integration with respect to distance, an energy transformation of the equation was additionally investigated. For the methods considered, comparative simulation of the electric train in acceleration mode was performed for four variants of the longitudinal profile. Accuracy was evaluated by the absolute deviations of the final values of distance and time from the reference calculation results. The Derringer–Suich method was used to form a composite indicator accounting for accuracy and computation time. **Results:** the choice of integration method for the computational core of an automatic train operation system should take into account the independent variable and step size. Integration with respect to speed provides high computational performance over intervals of monotonic speed change, but the calculation becomes more complicated when speed is maintained. Integration with respect to time is convenient when the duration of individual driving modes has to be maintained. Since in both cases the path is a dependent variable, changes in slope, speed limits and control commands associated with certain coordinates may occur within a step and must be taken into account separately. When integration is performed with respect to distance, the coordinates of these changes are used directly as step boundaries. For explicit second-order methods used for integration with respect to distance, a broad range of step sizes with a high composite indicator was identified across the profiles considered. **Practical significance:** the results make it possible to select the mathematical basis for the computational core of an automatic train operation system, taking into account the required balance between accuracy and computational performance, the features of the input dependencies and the applicability range of each method.

Keywords: electric train, automatic train operation, longitudinal motion, numerical integration, Derringer–Suich method

References

1. Valinskij O. S., et al. Vnedrenie sistemy avtovedeniya dlya povysheniya tochnosti upravleniya i energoeffektivnosti vysokoskorostnogo elektropoezda [Implementation of an Automatic Train Operation System to Improve Control Accuracy and Energy Efficiency of a High-Speed Electric Train], *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putej soobshcheniya [Proceedings of the Petersburg Transport University]*, 2025, vol. 22, iss. 1, pp. 7–18. DOI: 10.20295/1815-588X-2025-1-7-18 (In Russian)
2. Yurenko K. I., Fandeev E. I. Principy postroeniya i imitacionnoe modelirovanie sistem avtovedeniya elektropodvizhnogo sostava [Principles of Design and Simulation Modeling of

Automatic Train Operation Systems for Electric Rolling Stock], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki [Proceedings of Southern Federal University. Engineering Sciences]*, 2016, no. 8 (181), pp. 88–102. DOI: 10.18522/2311-3103-2016-8-88-102 (In Russian)

3. Yurenko K. I., Savoskin A. N., Fandeev E. I. Matematicheskoe modelirovanie energo-optimalnykh rezhimov vedeniya poezda s uchetom vozmushchenij [Mathematical Modeling of Energy-Optimal Train Operation Modes Considering Disturbances], *Izvestiya vysshih uchebnykh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Tekhnicheskie nauki [Proceedings of Higher Educational Institutions. North Caucasian Region. Engineering Sciences]*, 2015, no. 3 (184), pp. 34–44. DOI: 10.17213/0321-2653-2015-3-34-44 (In Russian)

4. Ablyalimov O. S. Uravnenie dvizheniya poezda i nekotorye metody ego resheniya [Train Motion Equation and Some Methods for Its Solution], *Universum: tekhnicheskie nauki [Universum: Engineering Sciences]*, 2020, no. 9 (78). URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/10715> (accessed: July 23, 2026). (In Russian)

5. Ablyalimov O. S. Effektivnost' resheniya differentsialnykh uravnenij vida $y' = f(x, y)$ metodom hord [Efficiency of Solving Differential Equations of the Form $y' = f(x, y)$ by the Chord Method], *Universum: tekhnicheskie nauki [Universum: Engineering Sciences]*, 2020, no. 9 (78). URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/10713> (accessed: July 23, 2026). (In Russian)

6. Butcher J. C. Implicit Runge–Kutta Processes, *Mathematics of Computation*, 1964, vol. 18, no. 85, pp. 50–64. DOI: 10.1090/S0025-5718-1964-0159424-9

7. Kennedy C. A., Carpenter M. H. Diagonally Implicit Runge–Kutta Methods for Ordinary Differential Equations: A Review. NASA/TM-2016-219173. Hampton: NASA Langley Research Center, 2016.

8. Harris C. R., et al. Array Programming with NumPy, *Nature*, 2020, vol. 585, pp. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2

9. Derringer G., Suich R. Simultaneous Optimization of Several Response Variables, *Journal of Quality Technology*, 1980, vol. 12, no. 4, pp. 214–219. DOI: 10.1080/00224065.1980.11980968

10. Derringer G. C. A Balancing Act: Optimizing a Product's Properties, *Quality Progress*, 1994, vol. 27, no. 6, pp. 51–58.

Received: June 21, 2026

Accepted: August 11, 2026

Author's information:

Oleg S. VALINSKIY — PhD in Engineering, Professor; rector@pgups.ru

Andrej M. EVSTAF'EV — Dr. Sci. in Engineering, Professor; evstafev@pgups.ru

Anton N. SYCHUGOV — PhD in Engineering, Associate Professor; sychugov@pgups.ru

Evgenij V. SUKHANOV — Postgraduate Student, Teaching Assistant; sukhanov.ev.genii@yandex.ru