

---

## Живучесть, надежность, безопасность

УДК 681.3.06-192

**В. А. Смагин, д-р техн. наук**

Кафедра метрологического обеспечения, вооружения, военной и специальной техники  
Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург

**В. П. Бубнов, д-р техн. наук**

Кафедра «Информационные и вычислительные системы»  
Петербургский государственный университет путей сообщения  
Императора Александра I, Санкт-Петербург

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ВИДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ГИПЕРФРАКТАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

Предложена математическая модель представления детерминированных и случайных процессов в виде последовательности фракталов. Она базируется на модели квантования информации и гипердельтном распределении вероятностей. Для формирования последовательности предложено нелинейное интегральное уравнение с целочисленным ядром. По нему находятся базовый фрактал и субфракталы (кластеры). Рассмотрен пример для равномерного распределения. Произведено оценивание вероятностных и энтропийных свойств компонентов разложения. Определяется влияние пороговой константы в нелинейном интегральном уравнении, предназначенном для нахождения величины базового фрактала, на величину его протяженности. Величина протяженности фрактала является важной характеристикой, от которой зависит количество информации, помещаемой во фрактале при известном законе ее распределения. Дается ответ на поставленный вопрос на примерах с двумя распределениями вероятностей. Результаты исследования рекомендованы для применения в метрологии, теории информации и теории эффективности.

нелинейное интегральное уравнение, базовый фрактал, константа и ее величина, графическое и численное решение, распределение количества информации, протяженность фрактала.

DOI: 10.20295/2412-9186-2019-5-2-145-159

#### **Введение**

Одним из актуальных направлений развития теории динамических систем и их многочисленных приложений является группа практических задач, связанных с нестационарной и хаотической динамикой управляемых процессов. Важнейшими представителями данного научного тренда явля-

ются прикладная теория хаотических процессов и методы фрактального анализа наблюдений [1–5].

В книге известного норвежского физика дается ясное и простое изложение математических свойств фракталов, описываются приложения теории фракталов в гидродинамике, океанологии, гидрологии, в исследовании перколяционных процессов и пр. [6]. Кроме того, приводятся методы компьютерной графики.

Фрактал (от лат. fractus – дробленный, сломанный, разбитый) – это множество, обладающее свойством самоподобия (объект, в точности или приближенно совпадающий с частью самого себя, т. е. целое имеет ту же форму). Создание теории фракталов и методов ее применения принадлежит известному ученому – автору большого цикла работ Б. Мандельброту [7].

Целью данной статьи является попытка предложить один из возможных математических методов моделирования детерминированных и случайных процессов, идея которого восходит как к работам авторов [8, 9], так и к идее применения фракталов, изложенной в [6, 8]. Она состоит в том, чтобы разработать приближенный метод исследования детерминированных и случайных процессов, с которыми тесно связаны прикладные методы современной науки технического и информационного профиля. В более простом понимании – связать науку о фракталах с теорией вероятностей и теорией информации. При этом авторы не претендуют на создание научной теории, а излагают свое понимание на простых прикладных примерах.

## 1. Математическая модель

В статье [8], посвященной разработке одной из моделей исследования немарковских процессов в теории надежности и массовом обслуживании, была предложена марковская модель гипердельтного распределения (см. также [9]). Она основана на методе равенства начальных моментов теоретического и аппроксимирующего распределения теории вероятностей. Здесь эту идею предлагается применить к построению приближенного последовательного распределения, построенного на выделении базового, основного фрактала и совокупности субфракталов более низкого ранга по сравнению с базовым фракталом. Затем на основе дельта-функций Дирака строится плотность вероятности фрактального распределения. С ее помощью оцениваются вероятностно интересные исследователя показатели объекта. Кроме того, если необходимо, предлагается применять функцию распределения энтропии для дополнительного оценивания качества объекта [10].

Математическая модель основывается на идее оптимального в смысле заполнения квантования информации [11]. Точнее, она использует запись авторами величины математического ожидания квантованной случайной величины:

$$M(x) = (x + c) \int_0^{\infty} \left( E\left(\frac{z}{x}\right) + 1 \right) f(z) dz, \quad (1)$$

где  $c$  – установленный постоянный пробел между квантами;  $x$  – величина кванта;  $E$  – наибольшая целая часть числа с недостатком;  $f(x)$  – плотность вероятности случайного количества квантуемой информации  $Z$ .

Пусть задана плотность вероятности  $f(x)$  на полуинтервале  $[0, \infty)$ , требуется представить ее в виде убывающей фрактальной последовательности, составленной базовым, основным фракталом  $\Phi_0$  и множеством субфракталов  $S\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots$ . Тогда можно принять следующую формулу для производства фрактализации:

$$\int_0^{\infty} E\left(\frac{z}{x}\right) f(z) dz - 1 = 0. \quad (2)$$

Содержательный смысл формулы (2) состоит в том, что математическое ожидание  $E$  не должно превышать единичного значения, но и не быть отрицательным. Нужно принять равенство  $x = \Phi_0$  и решить полученное нелинейное уравнение относительно неизвестной величины  $\Phi_0$ . При этом нужно как можно точнее вычислить эту величину. А затем проверить правильность достаточно строгого решения уравнения (2). Эта численная величина и будет представлять базовый, основной факториал. Можно убедиться, что точное решение уравнения (2) достигается при  $\max \Phi_0$  и оно будет единственным.

Следующим шагом процесса будет вычисление значения величины первого субфрактала  $\Phi_1$ . Этот процесс будет аналогичен процессу вычисления  $\Phi_0$ . Но нелинейное уравнение необходимо изменить таким образом, чтобы оно приняло следующую форму:

$$\frac{1}{\int_{\Phi_0}^{\infty} f(u) du} \int_{\Phi_0}^{\infty} E\left(\frac{z - \Phi_0}{\Phi_1}\right) f(z) dz - 1 = 0. \quad (3)$$

При известном определенном значении  $\Phi_0$  уравнение (3) нужно решить относительно  $\Phi_1$  с достаточной строгостью и проверить точность полученного решения. Множитель с внутренним интегралом в уравнении (3) определяет условную вероятность того, что предшествующий интервал базового фрактала был успешно завершен.

Следующим шагом процесса становится вычисление значения величины второго субфрактала  $\Phi_2$ . Для этого необходимо использовать следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} f(u)du} \int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} E\left(\frac{z-\Phi_0-\Phi_1}{\Phi_2}\right) f(z) dz - 1 = 0. \quad (4)$$

Сомножитель с внутренним интегралом в уравнении (4) определяет условную вероятность того, что предшествующий интервал до  $\Phi_2$ , включающий базовый фрактал и первый субфрактал, был успешно завершён. После выполнения процедуры следует также обеспечить и проверить точность полученного решения.

Далее следует производить процесс вычисления следующих субфракталов по аналогичным, но видоизменённым уравнениям до тех пор, пока величина последнего фрактала не будет пренебрежимо малой.

Авторы данной статьи не смогли найти метода решения рассматриваемого нелинейного уравнения в замкнутом, аналитическом виде. Поэтому решение находилось способом непосредственной замены искомой величины таким образом, чтобы высокая точность решения достаточно строго соответствовала максимальному значению искомого фрактала или субфрактала.

## 2. Пример выполнения процедур вычислений для заданного распределения вероятностей

Задано равномерное распределение, его плотность вероятности записывается в виде

$$f(x) = \text{dunif}(x, a, b), \quad a = 0, b = 100 \text{ ед.} \quad (5)$$

Для определения значения величины базового фрактала требуется решить уравнение

$$\int_0^{\infty} E\left(\frac{z}{\Phi_0}\right) f(z) dz - 1 = 0. \quad (6)$$

В результате решения путем простого подбора определяем  $\Phi_0 = 33,33$  ед. с точностью  $1,819 \cdot 10^{-4}$ . Число фракталов равно единице, а интервал временной занятости составит 33,33 ед.

Определяем значение величины первого субфрактала путем решения уравнения относительно  $\Phi_1$ :

$$\frac{1}{\int_{\Phi_0}^{\infty} f(u)du} \int_{\Phi_0}^{\infty} E\left(\frac{z-\Phi_0}{\Phi_1}\right) f(z) dz - 1 = 0. \quad (7)$$

Значение величины  $\int_{\Phi_0}^{\infty} f(u)du = 0,667$ . А значение величины  $\Phi_1$  будет равно 14,21 ед. с точностью  $2,367 \cdot 10^{-5}$ . Число субфракталов  $\Phi_1$  равно единице, поэтому интервал временной занятости составит 14,21 ед.

Определяем значение величины второго субфрактала путем решения уравнения относительно  $\Phi_2$ :

$$\frac{1}{\int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} f(u)du} \int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} E\left(\frac{z - \Phi_0 - \Phi_1}{\Phi_2}\right) f(z) dz - 1 = 0. \quad (8)$$

Значение величины  $\int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} f(u)du = 0,524$ . А значение величины  $\Phi_2$  будет равно 2,3996 ед. с точностью  $6,177 \cdot 10^{-5}$ . Число  $\Phi_2$  субфракталов равно единице, поэтому временной интервал занятости составит 2,3996 ед.

Определяем значение величины третьего субфрактала путем решения уравнения относительно  $\Phi_3$ :

$$\frac{1}{\int_{\Phi_0+\Phi_1+\Phi_2}^{\infty} f(u)du} \int_{\Phi_0+\Phi_1+\Phi_2}^{\infty} E\left(\frac{z - \Phi_0 - \Phi_1 - \Phi_2}{\Phi_3}\right) f(z) dz - 1 = 0; \quad (9)$$

$$\int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} f(u)du = 0,501.$$

А значение величины  $\Phi_3$  будет равно 0,1195 ед. с точностью  $4,889 \cdot 10^{-5}$ . Число  $\Phi_3$  субфракталов равно единице, поэтому временной интервал занятости составит 0,1195 ед.

Этим ограничимся, считая, что величина четвертого субфрактала будет достаточно близка к нулю.

**Анализ результатов примера.** В примере были получены следующие продолжительности времени занятости фрактала и субфракталов:

$$t_0 = 33,33 \text{ ед.}, t_1 = 14,21 \text{ ед.}, t_2 = 2,9963 \text{ ед.}, t_3 = 0,1195 \text{ ед.}$$

Обозначим соответствующие вероятности нахождения процесса в периодах времени занятости:

$$P_0(t_0) = 0,667, P_1(t_1) = 0,519, P_2(t_2) = 0,316, P_3(t_3) = 0.$$

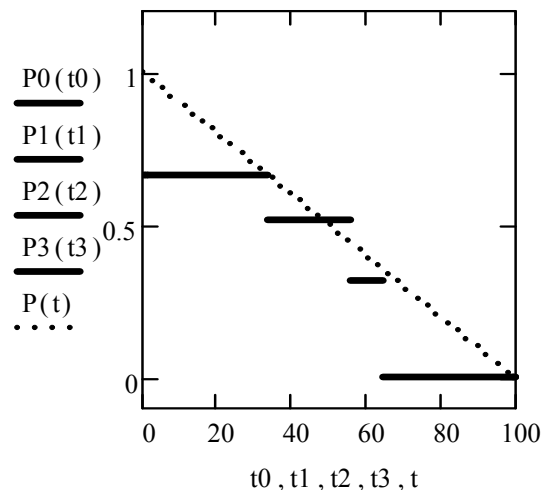


Рис. 1. Вероятность процесса занятости

На рисунке 1 графически показано изменение вероятностей процесса занятости по времени. Каждый отрезок прямой на рисунке соответствует вычисленной вероятности на конец отрезка. И если мы хотим сгладить контур кривой непрерывной линией вероятности, то должны соединить плавной линией точку  $l$  на оси ординат с правыми концами всех отрезков, исключая самый нижний отрезок. При достаточном количестве отрезков эта линия должна плавно переходить в нулевую линию – линию абсцисс. На данном рисунке при учете только двух субфракталов выполнить плавное со-

единение с осью абсцисс невозможно и кривую приходится обрывать, не достигая оси. На рисунке прямой пунктирной линией представлен график вероятности того, что событие, определяемое заданным равномерным распределением в примере с плотностью вероятности  $f(t) = \text{dunif}(x, a, b)$ ,  $a = 0$ ,

$b = 100$  ед. и формулой  $P(t) = 1 - \int_0^t f(z) dz$ , не может произойти. Эта линия до-

статочно хорошо аппроксимируется концами отрезков вероятностей базового фрактала и второго субфрактала. Это подтверждает корректность выполненной фрактальной аппроксимации заданного распределения вероятностей на основе последовательного гиперфрактального распределения.

Оценку эффективности фрактального прогноза можно произвести по ресурсу Н. М. Седякина. Здесь величина ресурса – это критерий важности, или веса, фрактала. Ресурс за время  $t$  определяется по формуле  $r(t) =$

$= \int_0^t \lambda(z) dz$ ,  $\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}$ . Временные интервалы занятости  $t_0 = 0$ ;  $t_1 = 33,33$ ;  $t_2 =$

$= 55,5$ ;  $t_3 = 64,2$ . Остаточный временной интервал  $t > 64,2$ . Фрактальные

(прогнозируемые) ресурсы  $r_0(t_0) = 0$ ;  $r_1(t_1) = 0,334$ ;  $r_2(t_2) = 0,555$ ;  $r_3(t_3) =$

$= 0,642$ . Суммарный фрактальный ресурс 1,531. Остаточный ресурс  $r(t > 64,2) = 0,358$ . Полный ресурс 1,889. Доля фрактальных ресурсов  $1,532 / 1,889 = 81,048 \%$ . Доля остаточного ресурса  $0,358 / 1,889 = 18,952 \%$ .

Таким образом, определение базового фрактала и двух субфракталов для рассмотренного распределения вероятности оценивается 81,048 %, т. е. уровнем эффективности. Это, на наш взгляд, достаточно хорошая оценка.

Выполним оценивание важности фракталов примера по критерию плотности вероятности случайной величины энтропии [11]. Для этого по

вычисленным вероятностям для фракталов найдем средние значения энтропии  $H$ , ее второй начальный момент  $\alpha$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma$ . Значения указанных величин приведены в таблице 1.

**Таблица 1.** Характеристика фракталов

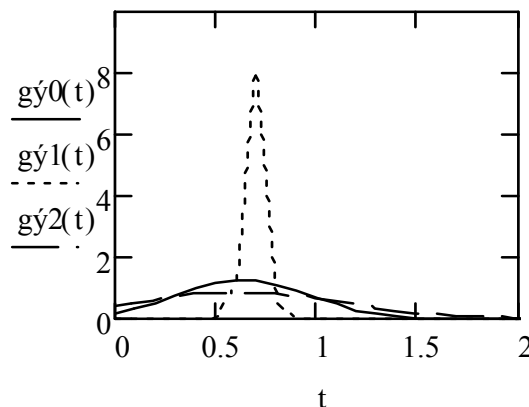
$P$	$H$	$\alpha$	$\delta$
0,667	0,636	0,512	0,328
0,519	0,692	0,481	0,046
0,316	0,624	0,518	0,484
0	0	0,008	0,092

Выполним аппроксимацию плотности энтропии нормальным распределением:

$$g(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-H)^2}{2\sigma^2}}, \quad (10)$$

где  $C$  – константа нормирования плотности.

На рисунке 2 приведены графики трех плотностей вероятностей для первых трех строк таблицы 1. Из рисунка следует, что первый субфрактал примера имеет самую большую значимость, или вес. Действительно, грубое оценивание значений показателя концентрации величины энтропии (информации) фракталов  $I$  по данным таблицы 1 и рисунка 2 приводит к следующим результатам: фрактал  $\Phi$  (первая строка таблицы и нулевой график плотности рисунка 2) –  $I = 5,21$ ; первый субфрактал  $\Phi_1$  (вторая строка таблицы и первый график плотности рисунка 2) –  $I = 9,031$ ; второй субфрактал  $\Phi_2$  (третья строка таблицы и второй график плотности рисунка 2) –  $I = 4,502$ .



**Рис. 2.** Плотность вероятностей строк таблицы

### 3. Влияние величины пороговой константы в интегральном уравнении для нахождения фракталов последовательного гиперфрактального распределения

Из интегральных уравнений (2)–(4) следует, что длительность таким образом определенных фракталов (непрерывных кластеров) в исследовании информационных процессов должна иметь определенную содержа-

тельную весомость, или важность, а вероятность их появления на оси абсцисс говорит о шансах влияния на другие связанные с ними процессы. Поэтому знание протяженностей этих фракталов и вероятностей их появления важно для исследователя при решении поставленных им задач.

Значит целесообразно ставить вопрос о том, какие базовые фракталы по их параметрам следует предпочитать и как пытаться достичь этого.

**Формализация поставленной задачи.** В интегральных уравнениях (3), (4) при условии, что плотность вероятности исследуемого процесса  $f(x)$  известна, можно ответить на поставленный вопрос изменением только единственной пороговой константы – единицы. Попробуем заменить ее константой  $D$ , изменяемой в некоторых пределах. Для простоты решения задачи введем  $D = 0,5; 1,0; 1,5$ . Далее зададимся некоторым конкретным распределением вероятности с плотностью  $f(x)$  и графически получим решения только для базового фрактала.

**Пример 1.** Пусть приходящая информация распределена по нормальному закону и задана плотностью вероятности  $f(x) = dnorm(x, m, \sigma)$ ,  $m = 100$  ед.,  $\sigma = 20$  ед. Обозначим пороговую константу  $D$ , которая может принимать три значения: 0,5; 1,0; 1,5. Тогда уравнение (2) можно представить системой уравнений:

$$\begin{aligned} A0(x) &= \int_0^{\infty} trunc\left(\frac{z}{x}\right) f(z) dz - D0(x) = 0, D0(x) = 0,5; \\ A1(x) &= \int_0^{\infty} trunc\left(\frac{z}{x}\right) f(z) dz - D1(x) = 0, D1(x) = 1,0; \\ A2(x) &= \int_0^{\infty} trunc\left(\frac{z}{x}\right) f(z) dz - D2(x) = 0, D2(x) = 1,5. \end{aligned} \quad (11)$$

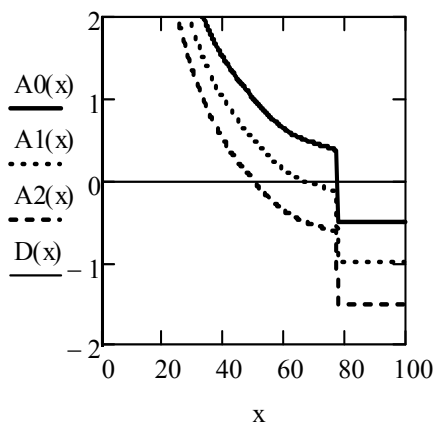


Рис. 3. Графическое решение

К системе (11) добавим еще уравнение нулевой линии  $D(x) = 0$ . Далее найдем графическое решения (11), которое представлено на рисунке 3.

На пересечении всех трех графиков с нулевой линией рисунка 3 найдем искомые решения для величин базовых фракталов при ограничениях  $Di(x)$ ,  $i = 1 - 3$ ,  $\Phi0 = 77,6$  ед.,  $\Phi1 = 66,5$  ед.,  $\Phi2 = 49,8$  ед. При этом все  $Ai(\Phi_i) = 0$ ,  $i = 0 - 2$  определены практически с достаточно высокой точностью. Из рисунка



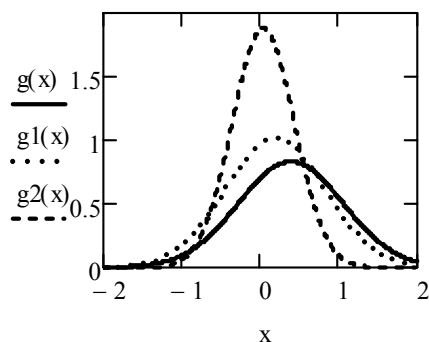
ка 3 следует, что наиболее результативным по длительности является базовый фрактал, полученный при самом низком значении порога  $D = 0,5$ , а наименее результативным – базовый фрактал при наибольшем значении порога  $D = 1,5$ .

Оценим величину энтропии базового фрактала при тех же значениях порога ограничения. Для этого сначала определим вероятность охвата протяженности каждого фрактала по формуле  $Q(x) = \int_0^x f(z) dz$ . Затем по найденным вероятностям найдем среднюю величину, второй начальный момент и среднеквадратическое значение энтропии каждого фрактала. По этим характеристикам и при априорно принятом условии о нормальном распределении случайной величины энтропии найдем законы распределения энтропии для определенных базовых фракталов. Численные значения указанных характеристик представлены в таблице 2.

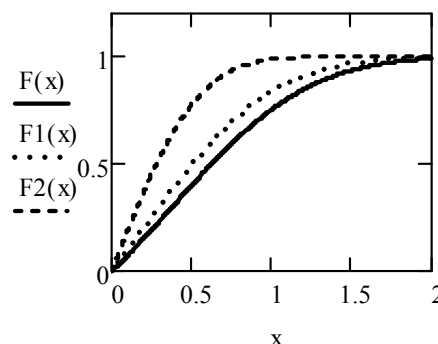
**Таблица 2.** Численные значения характеристик фракталов

$D$	$Q$	$H$	$\alpha$	$\delta$
0,5	0,31	0,388	0,558	0,666
1,0	0,047	0,190	0,442	0,637
1,5	0,006	0,037	0,157	0,395

На основании этих значений составлены графики плотностей вероятностей и функций распределения случайной величины энтропии для трех базовых фракталов при различных пороговых величинах  $D$  (рис. 4, 5). Можно заключить, что наиболее информативным (менее значимым по величине энтропии) является значение порогового ограничения  $D = 0,5$ , которому уступают  $D = 1, D = 1,5$ . Это следует принимать во внимание для получения наилучшего результата.



**Рис. 4.** Плотность вероятностей



**Рис. 5.** Функция распределения вероятностей

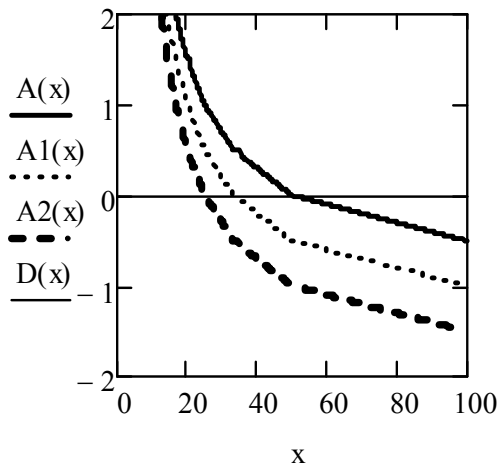


Рис. 6. Графическое решение

**Пример 2.** Определение величины базового фрактала с равномерным распределением  $f(x) = \text{dunif}(x, a, b)$ ,  $a = 0$  ед.,  $b = 100$  ед. при тех же пороговых ограничениях  $D = 0,5; 1,0; 1,5$ . Проведя выкладки, аналогичные примеру 1, получим графические характеристики, приведенные на рисунке 6.

Численные значения указанных характеристик представлены в таблице 3. Они получены по тем же выражениям, которые были использованы в примере 1.

Таблица 3. Численные значения характеристик фракталов

$D$	$Q$	$H$	$\alpha$	$\delta$
0,5	0,50	0,693	0,48	0,50
1,0	0,34	0,641	0,51	0,314
1,5	0,25	0,562	0,543	0,476

Рисунки 7 и 8 показывают, что наиболее информативным (менее значимым по величине энтропии) является значение порогового ограничения  $D = 0,5$ , которому уступают  $D = 1, D = 1,5$ . Однако по сравнению с графиками примера 1 все три кривые располагаются более близко друг к другу. Вторые функции плотности и распределения на рисунках 7 и 8 располагаются более выпукло по сравнению с аналогичными функциями на рисунках 4 и 5. Это можно объяснить тем, что нормальный закон распределения по сравнению с равномерным законом распределения является более «тяжелым».

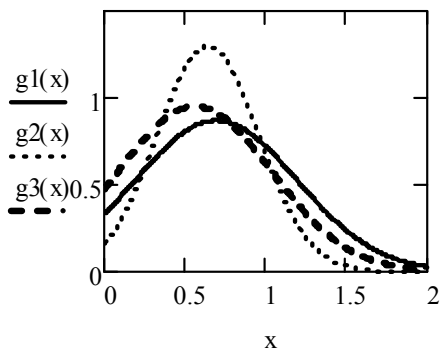


Рис. 7. Плотность вероятностей

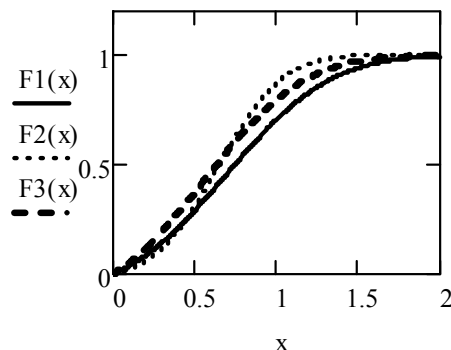


Рис. 8. Функция распределения вероятностей

## Заключение

Математическая модель, предложенная в статье, может найти применение в различных прикладных научных исследованиях. Например, гиперфрактальное распределение позволяет представлять современные системы счисления в виде совокупности фракталов, вводить новые системы счисления для моделирования процессов и применять их в изучении проблем теории информации. Фактически оно приложимо к моделированию процессов любой физической природы – материальной или информационной. Оно позволяет изучать различные случайные процессы с целью увеличения точности их познания. Является достаточно привлекательным для метрологии [12], теории эффективности.

Фракталы, теория фракталов в настоящее время применяются при описании различных явлений – от биологических до квантово-механических [13–18]. На основании знакомства с отдельными трудами этой теории в статье предложена математическая модель предоставления процессов на основе последовательного гиперфрактального распределения. Она опирается на элементы теории квантования информации и на гипердельтное распределение вероятностей, ранее предложенной авторами. Для моделирования последовательности фракталов распределений вероятностей предложено нелинейное интегральное уравнение. Ядро этого уравнения представлено в целочисленном виде. В результате последовательного решения уравнения находятся базовый фрактал и производные от него субфракталы (кластеры). Величина и содержание каждого фрактала могут изучаться для оценивания его важности, информативности и т. д.

В статье был поставлен вопрос о влиянии изменения пороговой константы в интегральном нелинейном уравнении, применяемом для нахождения базового фрактала при заданной функции распределения количества поступающей информации. Принимались значения пороговой константы 0,5; 1,0; 1,5. Показано, что меньшее значение константы приводит к увеличению протяженности базового фрактала, большее значение – к ее уменьшению. Если протяженность фрактала связывать с количеством информации, зависящей от нее, это может представлять интерес для исследователя. В случае противоборства двух сторон интерес их различен. И он оправдывает выбор базового фрактала и субфракталов по-разному. Данный вопрос в статье не рассматривался. Рассмотрены два примера с нормальным и равномерным распределением количества поступающей информации. Установлено, что при нормальном распределении указанный эффект по протяженности базового фрактала более выражен, чем при равномерном распределении, так как нормальное распределение является более «тяжелым» и значимым для определения неопределенности количества информации.

Величина базового фрактала может служить основой для определения протяженностей субфракталов последовательного гиперфрактального распределения при решении прикладных задач. При этом при построении определенной стратегии действия с целью достижения успеха оператор может даже в одном разложении по своему усмотрению менять величину пороговой константы. Простейший пример – в игровой ситуации двух противодействующих друг другу сторон. Модель может найти применение в метрологии, теории информации, теории эффективности и в решении конкретных прикладных задач детерминированной или случайной направленности; на ее основе могут быть получены и новые результаты в теории фракталов.

### Библиографический список

1. Ахметханов Р. С. Применение теории фракталов и вейвлет-анализа для выявления особенностей временных рядов при диагностике систем // Вестник научно-технического развития. – № 1 (17). – 2009. – С. 26–31.
2. Антонов В. И., Загайнов А. И., Ву ван Куанг. Автоматизированное программное обеспечение для численных мультифрактальных исследований // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2013. – № 2 (169). – С. 71–77.
3. Безручко Б. П., Смирнов Д. А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. – Саратов : ГосУНЦ «Колледж», 2005. – С. 320.
4. Кратчфилд Д. П., Фармер Д. Д., Паккард Н. Х., Шоу Р. С. Хаос // В мире науки. – № 2. – 1987. – С. 16–28.
5. Шустер Г. Детерминированный хаос: введение // пер. с нем. – М. : Мир, 1988. – 253 с.
6. Feder J. Fractals. – N. Y. : Springer, 1988. – 254 p.
7. Mandelbrot B. V. Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension. – Paris : Flammarion, 1975. – 190 p.
8. Смагин В. А. Моделирование случайных процессов на основе гипердельтного распределения / В. А. Смагин, Г. В. Филимоныхин // Автоматика и вычислительная техника. – 1990. – № 5. – С. 25–31.
9. Бубнов В. П. Применение гипердельтного распределения в имитационных моделях микропроцессорных систем управления и диагностики электровозов / В. П. Бубнов, В. И. Сафонов, С. А. Сергеев // Вестник Всероссийского научно-исследовательского и проектно-конструкторского института электровозостроения. – 2015. – № 1 (69). – С. 39–47.
10. Смагин В. А. Техническая синергетика. Вероятностные модели сложных систем. – СПб., 2004. – 171 с.
11. Андронов А. М., Бокоев Т. Н. Оптимальное в смысле заполнения квантование информации // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С. 154–158.
12. Дорохов А. Н. Метрологическое обеспечение эксплуатации вооружения и военной техники : учебник / 10 авт. ; под ред. А. Н. Миронова. – СПб., 2009. – 755 с.
13. Захаров А. И., Загайнов А. И. Реализация программного комплекса для вычисления фрактальных параметров сложных систем // Интеллектуальные технологии на транспорте. – 2015. – № 2. – С. 47–53.
14. Falconer K. Fractal geometry. – UK : Univ. St. Andrews, 2003. – 335 p.
15. Потапов А. А. Фракталы и дробные операторы в обработке информации фундаментальное направление синергетики // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 6. – С. 30–40.

16. Li H. Fractal analysis of side channels for breakdown structures in XLPE cable insulation // *J. Mater. Sci.: Mater. Electron. Springer Sci.* 2013. – No 24. – Pp. 1640–1643.
17. Martínez C. A. T., Fuentes C. Chapter 1. Applications of Radial Basis Function Schemes to Fractional Partial Differential Equations // *Mathematics Fractal Analysis – Applications in Physics, Engineering and Technology* / ed. F. Brambila, 2017.
18. Agboola O., Onyango M. S., Popoola P., Oyewo O. A. Chapter 10. Fractal Geometry and Porosity // *Mathematics Fractal Analysis – Applications in Physics, Engineering and Technology* / ed. F. Brambila. – 2017.

*Vladimir A. Smagin*

A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Department of Metrological Support

*Vladimir P. Bubnov*

«Information Technology Systems» department  
Emperor Alexander I St. Petersburg state transport university

### **Mathematical model of determinated and random processes in the form of consistent hyperfractal distribution**

A mathematical model for representing deterministic and random processes in the form of a sequence of fractals is proposed. It is based on a information quantization model and a hyperdelta probability distribution. To form a sequence, a nonlinear integral equation with an integer kernel is proposed. It is used to determine basic fractal and subfractals (clusters). An example for uniform distribution is considered. The probabilistic and entropy properties of the decomposition components are evaluated. The influence of the threshold constant in the nonlinear integral equation, which is used to find the value of the base fractal, on its extent is determined. The fractal length is an important characteristic on which the amount of information placed in the fractal on the known law of its distribution depends. The answer to this question is given by examples with two probability distributions. The research results are recommended for use in metrology, information theory and efficiency theory.

nonlinear integral equation, basic fractal, constant and its value, graphical and numerical solution, distribution of the amount of information, the length of the fractal.

### **References**

1. Ahmethanov R. S. (2009) Application of fractal theory and wavelet analysis to identify the characteristics of the time series in the diagnosis of systems [Primenenie teorii fraktalov i veyvlet-analiza dlya vyyavleniya osobennostej vremennyh ryadov pri diagnostike system]. *Bulletin of scientifictechnical development [Vestnik nauchnotekhnicheskogo razvitiya]*. – No 1 (17). – Pp. 26–31.
2. Antonov V. I., Zagajnov A. I., Vu van Kuang. (2013) Automated software for numerical multifractal research [Avtomatizirovannoe programmnoe obespechenie dlya chislennyh multifraktalnyh issledovaniy]. *Scientific and technical Bulletin of St. Petersburg state technical University [Nauchnotekhnicheskie vedomosti Sankt Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta]*. – No 2 (169). – Pp. 71–77.

3. Bezruchko B. P., Smirnov D. A. (2005) Mathematical modeling and chaotic time series [Matematicheskoe modelirovanie i haoticheskie vremennye ryady]. Saratov : Gosunts «College» [Saratov : GosUNTS. Kolledzh]. – Pp. 320.
4. Kratchfeld D. P., Farmer D. D., Pakkard N. H., SHou R. S. (1987) Chaos [Haos] (1987) World of Science [V mire nauki]. No 2. – Pp. 16–28.
5. SHuster G. (1988) Deterministic chaos: an introduction [Determinirovannyj haos vvedenie], per. s nem. – Moscow : Mir. – 253 p.
6. Feder J. Fractals. – N. Y. : Springer, 1988. – 254 p.
7. Mandelbrot B. B. Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension. – Paris: Flammarion, 1975. – 190 p.
8. Smagin V. A., Filimonihin G. V. (1990) Simulation of random processes on the basis of hyperculture distribution [Modelirovanie sluchajnyh protsessov na osnove giperdeltnogo raspredeleniya]. ED [AVT]. – No 5. – Pp. 25–31.
9. Bubnov V. P., Bubnov V. P., Safonov V. I., Sergeev S. A. (2015) Application hyperculture distribution of simulation models of microprocessor control systems and diagnostics of the electric [Primenenie giperdeltnogo raspredeleniya v imitatsionnyh modelyah mikroprotsessornyh sistem upravleniya i diagnostiki ehlektrovozov]. Bulletin of all-Russian scientific research and design Institute of electric locomotive engineering [Vestnik Vserossijskogo nauchno issledovatel'skogo i proektnokonstruktorskogo instituta ehlektrovozostroyeniya]. – No 1 (69). – Pp. 39–47.
10. Smagin V. A. (2004) Technical synergy. Probabilistic models of complex systems [Tekhnicheskaya sinergetika. Veroyatnostnyye modeli slozhnyh system]. – St. Petersburg. – 171 p.
11. Andronov A. M., Bokojev T. N. (1979) Optimal in the sense of filling information quantization [Optimalnoe v smysle zapolneniya kvantovanie informatsii]. WPI. USSR Academy of Sciences. Technical cybernetics [Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika]. – No 3. – Pp. 154–158.
12. Dorohov A. N. (2009) Metrological support of the operation of weapons and military equipment [Metrologicheskoe obespechenie ehkspluatatsii vooruzheniya i voennoj tekhniki uchebnik], 10 auth., ed. A. N. Mironova. – St. Petersburg. – 755 p.
13. Zaharov A. I., Zagaynov A. I. (2015) Implementation of programstion of the complex to calculate the fractal parameters complex systems [Realizatsiya programmno kompleksa dlya vychisleniya fraktalnyh parametrov slozhnyh system]. Intelligent technologies for TRANSPORT [Intellektualnye tekhnologii na transporte]. – No 2. – Pp. 47–53.
14. Falconer K. Fractal geometry. – UK : Univ. St. Andrews, 2003. – 335 p.
15. Potapov A. A. (2011) The fractals and fractional operators in the developing information fundamental direction sinergetiki [Fraktaly i drobnye operatory v obrabotke informatsii fundamentalnoe napravlenie sinergetiki]. Izvestiya SFedU. Engineering science [Izv. YUFU. Tekhnicheskie nauki]. – No 6. – Pp. 30–40.
16. Li H. Fractal analysis of side channels for breakdown structures in XLPE cable insulation, J. Mater. Sci.: Mater. Electron. Springer Sci. 2013. – No 24. – Pp. 1640–1643.
17. Martínez C. A. T., Fuentes C. Chapter 1. Applications of Radial Basis Function Schemes to Fractional Partial Differential Equations, Mathematics Fractal Analysis – Applications in Physics, Engineering and Technology, ed. F. Brambila, 2017.

18. Agboola O., Onyango M. S., Popoola P., Oyewo O. A. Chapter 10. Fractal Geometry and Porosity, Mathematics Fractal Analysis – Applications in Physics, Engineering and Technology ed. F. Brambila. – 2017.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В. А. Ходаковским  
Поступила в редакцию 30.01.2019, принята к публикации 22.02.2019*

*СМАГИН Владимир Александрович* – заслуженный деятель науки Российской Федерации, доктор технических наук, профессор кафедры метрологического обеспечения, вооружения, военной и специальной техники Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского;

e-mail: va\_smagin@mail.ru

*БУБНОВ Владимир Петрович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные и вычислительные системы» Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I;

e-mail: bubnov1950@yandex.ru

© Смагин В. А., Бубнов В. П., 2019